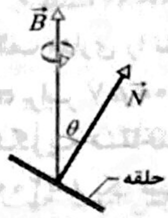
فصل

۲۶

القا القاییدگی

بخش ۲۶-۴ قانون لنز

•۱- در شکل ۲۶-۳۱ یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به قطر ۱۰cm (کنارهٔ آن دیده می‌شود) طوری در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۰/۵۰T قرار داده می‌شود که بردار عمود $\vec{N}$ بر آن با میدان زاویهٔ θ=۳۰° می‌سازد. سپس حلقه با آهنگ ثابت ۱۰۰ دور بر دقیقه به گونه‌ای چرخانده می‌شود که $\vec{N}$ روی مخروطی حول میدان مغناطیسی می‌چرخد؛ در طی این فرایند زاویهٔ θ تغییر نمی‌کند. emf القا شده در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۱ مسئلهٔ ۱

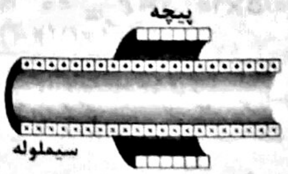
حل: در این مسئله داریم $\Phi_B = BA\cos\theta$ و چون هیچ یک از سه کمیت A، B و θ تغییر نمی‌کنند، شار ثابت بوده و نیروی محرکه القایی صفر است.

•۲- یک مادهٔ رسانای کشسان را می‌کشیم و آن را به شکل حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۲۰/cm در می‌آوریم. حلقه در یک میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۸۰۰ قرار داده می‌شود به طوری که صفحهٔ آن عمود بر میدان است. وقتی آن را رها کنیم، شعاع حلقه با آهنگ لحظه‌ای ۷۵/۰cm/s شروع به کوچک شدن می‌کند. در آن لحظه emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل: $\Phi_B = BA = B\pi r^۲$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -۲B\pi r\frac{dr}{dt}$$
$$= -۲\pi(۰/۸)(۰/۱۲)(۰/۷۵) = ۰/۴۵۲\text{V}$$

•۳- WWW SSM در شکل ۲۶-۳۲ یک پیچهٔ ۱۲۰ دور با شعاع ۱/۸cm و مقاومت ۵/۳Ω با سیملوله‌ای با ۲۲۰ دور بر سانتی‌متر و قطر ۳/۲cm هم‌محور است. جریان در سیملوله در بازهٔ زمانی Δt=۲۵s از ۱/۵A به صفر کاهش می‌یابد. در طی زمان Δt جریان القا شده در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۲ مسئلهٔ ۳

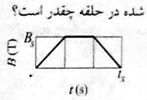
حل: مشاهده می‌شود که emf کل القا شده در پیچه برابر است با

$$\varepsilon=-N\frac{d\Phi_B}{dt}=-NA\left(\frac{dB}{dt}\right)=-NA\frac{d}{dt}(\mu_\circ ni)$$
$$=-N\mu_\circ n(\pi r^۲)\frac{di}{dt}$$
$$=-(۱۲۰)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۲۰۰۰)\pi(۰/۰۱۶m)^۲\left(\frac{۱/۵}{۰/۰۲۵}\right)$$
$$=-۰/۱۶\text{V}$$

آنگاه جریان القا شده در پیچه از رابطه زیر به دست می‌آید

$$i=\frac{|\varepsilon|}{R}=\frac{۰/۱۶}{۵/۳}=۰/۰۳$$

•۴- یک حلقهٔ سیمی به شعاع ۱۲cm و مقاومت ۸/۵Ω در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که بزرگی آن به ترتیب شکل ۲۶-۳۳ تغییر می‌کند قرار دارد. مقیاس محور قائم با $B_s=۰/۵۰\text{T}$ و مقیاس محور افقی با $t_s=۶/۰۰s$ مشخص شده است. صفحهٔ حلقه بر $\vec{B}$ عمود است. در بازه‌های زمانی (الف) ۰ تا ۲/۰s، (ب) ۲/۰s تا ۴/۰s و (پ) ۴/۰s تا ۴/۰s، emf القا شده در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۳۳ مسئلهٔ ۴

حل:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-A\frac{dB}{dt}=-\pi r^۲\frac{dB}{dt}$$

به ازای $۰<t<۲s$ از روی نمودار شکل ۲۶-۳۶ شیب منحنی (dB/dt) را تعیین کرد، در نتیجه داریم

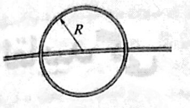
$$\varepsilon=-\pi(۰/۱۲)^۲\left(\frac{۰/۵-۰}{۲}\right)=-۱/۱۲\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

(ب) در $۲s<t<۴s$، $dB/dt=۰$ و در نتیجه $\varepsilon=۰$ است.

(پ) به ازای $۴s<t<۶s$ داریم:

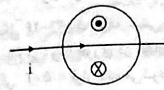
$$\varepsilon=-\pi(۰/۱۲)^۲\left(\frac{۰-۰/۵}{۲}\right)=۱/۱۲\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

•۵- در شکل ۲۶-۳۴ سیمی به شکل حلقهٔ دایره‌ای بسته با شعاع R=۲/۰m و مقاومت ۴/۰Ω در آمده است. مرکز دایره روی یک سیم مستقیم دراز قرار دارد؛ در زمان $t=۰$ جریان در سیم مستقیم ۵/۰A و به سمت راست است. از این لحظه به بعد، جریان با رابطهٔ $i=۵/۰\text{A}-(۲/۰\text{A/s}^۲)t^۲$ تغییر می‌کند. (سیم دراز به گونه‌ای عایق‌بندی شده است که تماس الکتریکی بین آن و حلقهٔ سیمی وجود ندارد.) بزرگی جریان القا شده در حلقه در زمان $t>۰$ چقدر است؟



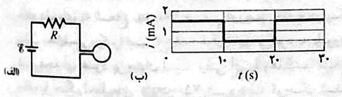
شکل ۲۶-۳۴ مسئلهٔ ۵

حل:



میدان حاصل از سیم در نیمه بالایی حلقه به سمت خارج و در نیمه پایینی به سمت داخل صفحه است و بنا به تقارن دو نیم‌دایره، شار کل صفر است و نیروی محرکه القایی نیز صفر است.

•۶- شکل ۲۶-۳۵ الف مداری را نشان می‌دهد که شامل یک باتری آرمانی با emf برابر $\mathscr{E}=۶/۰۰\ \mu\text{V}$، یک مقاومت R و یک حلقه سیم کوچک به مساحت ۵/۰ cm² است. در بازهٔ زمانی $t=۱۰\text{ s}$ تا $t=۲۰\text{ s}$ یک میدان مغناطیسی خارجی از حلقه می‌گذرد. میدان یکنواخت است و جهت آن به سمت داخل صفحه در شکل ۲۶-۳۵ الف قرار دارد و بزرگی میدان با رابطهٔ $B=at$ داده می‌شود که در آن B برحسب تسلا، a ثابت و t برحسب ثانیه است. شکل ۲۶-۳۵ ب جریان i را پیش از، در حین و پس از برقراری میدان خارجی نشان می‌دهد. در معادلهٔ مربوط به بزرگی میدان ثابت a را به دست آورید.



شکل ۲۶-۳۵ مسئلهٔ ۶

حل: با توجه به نمودار شکل ب دیده می‌شود که قبل از اعمال میدان در $۰<t<۱۰s$ جریان ناشی از باتری برابر ۱/۵mA بوده است

$$R=\frac{\varepsilon}{i}=\frac{۶\times۱۰^{-۶}}{۱/۵\times۱۰^{-۳}}=۴\times۱۰^{-۳}\ \Omega$$

همچنین دیده می‌شود که در بازه $۱۰s<t<۲۰s$ جریان مدار ۰/۵mA است پس نیروی محرکه القایی در سیم پیچ برابر است با

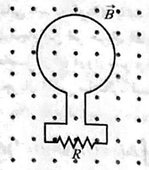
$$\varepsilon-Ri-\varepsilon_{\text{القایی}}=۰$$
$$۶\times۱۰^{-۶}-(۴\times۱۰^{-۳})(۰/۵\times۱۰^{-۳})-\varepsilon_{\text{القایی}}=۰$$
$$\Rightarrow\varepsilon_{\text{القایی}}=۴\times۱۰^{-۶}\ \text{V}$$

حال با استفاده از قانون القا فارادی می‌توانیم ضریب a را به دست آوریم

$$\varepsilon_{\text{القایی}}=\frac{d\Phi_B}{dt}=-A\frac{dB}{dt}=-Aa=-(۵\times۱۰^{-۴})a$$

که خواهیم داشت $a=۰/۰۰۸\text{T/s}$.

•۷- در شکل ۲۶-۳۶، شار مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد با رابطهٔ $\Phi_B=۶/۰t^۲+۷/۰t$ افزایش می‌یابد که در آن Φ_B برحسب میلی‌وبر و t برحسب ثانیه است. (الف) وقتی t=۲/۰s است، بزرگی emf القایی در حلقه چقدر است؟ (ب) جهت جریان در R به سمت راست است یا چپ؟



شکل ۲۶-۳۶ مسئلهٔ ۷

حل: (الف)

$$\varepsilon=\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=۱۲t+۷\Big|_{t=۲s}=۱۲(۲)+۷=۳۱\text{mV}$$

(ب) چون شار در حال افزایش است جهت جریان باید طوری باشد که مانع این افزایش گردد و میدانی در خلاف جهت میدان اصلی ایجاد نماید. چون میدان اصلی به سمت خارج صفحه است لذا میدان القایی باید به سمت داخل صفحه باشد در نتیجه جریان باید ساعتگرد و جهت جریان در R از راست به چپ باشد.

•۸- یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ بر صفحهٔ حلقهٔ دایره‌ای به قطر ۱۰cm عمود است. این حلقه از سیمی مسی به قطر ۲/۵mm و مقاومت ویژهٔ $۱/۶۹\times۱۰^{-۸}\ \Omega.m$ تشکیل شده است. با چه آهنگی بزرگی $\vec{B}$ باید تغییر کند تا یک جریان ۱۰A در حلقه القا شود؟

حل: برای مقاومت حلقه داریم $R=\rho\frac{L}{A}$ که در آن $\rho=۱/۶\times۱۰^{-۸}\ \Omega m$ و

$$L=۲\pi\frac{d}{۲}=\pi d=\pi(۰/۱)=۰/۳۱۴$$

$$A'=\pi\left(\frac{d'}{۲}\right)^۲=\pi\left(\frac{۲/۵\times۱۰^{-۳}}{۲}\right)^۲=۴/۹۱\times۱۰^{-۶}$$

به این ترتیب داریم $R=۱/۱\times۱۰^{-۳}\ \Omega$. حال با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت

$$i=\frac{|\varepsilon|}{R}=\frac{|d\Phi B/dt|}{R}=\frac{|AdB/dt|}{R}=\frac{\pi r^۲}{R}\frac{dB}{dt}$$
$$\frac{dB}{dt}=\frac{iR}{\pi r^۲}=\frac{(۱۰)(۱/۱\times۱۰^{-۳})}{\pi(۰/۰۵)^۲}=۱/۳۹\ \text{T/s}$$

•۹- حلقهٔ کوچکی به مساحت ۶/۸mm² داخل سیملولهٔ درازی که دارای ۸۵۴دور/cm و حامل جریان متغیر سینوسی i با دامنهٔ ۱/۲۸A و بسامد زاویه‌ای ۲۱۲rad/s است، قرار دارد. محور مرکزی حلقه و سیملوله بر هم منطبق‌اند. دامنهٔ emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل: جریان سیملوله را به صورت به $i=i_\circ\sin\omega t$ در نظر می‌گیریم.

$$B=\mu_\circ ni$$
$$\Phi_B=BA=B(\pi R^۲)=\mu_\circ ni(\pi R^۲)$$
$$\varepsilon=\frac{d\Phi_B}{dt}=\mu_\circ n\pi R^۲\frac{di}{dt}=\mu_\circ n\pi R^۲ i_\circ\omega\cos\omega t$$

که با قرار دادن مقادیر داده در دامنه $\varepsilon_m=\mu_\circ n\pi R^۲ i_\circ\omega$ خواهیم داشت $\varepsilon_m=۱/۹۸\times۱۰^{-۶}\ \text{V}$

••۱۰- شکل ۲۶-۳۷ یک حلقهٔ بسته از سیم شامل یک جفت نیم‌دایرهٔ یکسان با شعاع ۳/۷cm است که در دو صفحهٔ عمود بر هم قرار دارند. حلقه به این صورت شکل می‌گیرد که حلقهٔ دایره‌ای تختی را در امتداد قطرش آنقدر تا می‌کنیم تا دو نیمه بر هم عمود شوند. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۷۶mT بر قطر تا شده عمود است و با صفحه‌های نیم‌دایره‌ای زاویه‌های یکسان (°۴۵) می‌سازد. در طی بازهٔ زمانی ۴۵ms، میدان مغناطیسی با آهنگی یکنواخت به صفر کاهش می‌یابد. در طی این بازهٔ زمانی، مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت (ساعتگرد یا پاد ساعتگرد وقتی که در امتداد جهت $\vec{B}$ نگاه کنیم) emf القایی در حلقه.

شکل ۲۶-۳۷ مسئلهٔ ۱۰

حل: با کمی دقت مشاهده می‌شود که در هر حال دو شار مغناطیسی در حال عبور از حلقه خم شده است و لذا شار خالص عبوری چنین می‌شود

$$\Phi_B=۲BA\cos۴۵^\circ=۲B(\pi r^۲/۲)(\cos۴۵^\circ)=\pi r^۲B/\sqrt{۲}$$

اکنون از قانون القا فارادی داریم

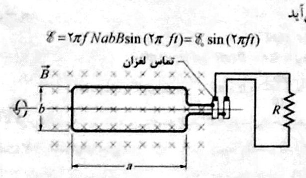
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi r^۲B}{\sqrt{۲}}\right)=-\frac{\pi r^۲}{\sqrt{۲}}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)$$

$$=-\frac{\pi(۳/۷\times۱۰^{۲})}{\sqrt{۲}}\left(\frac{۰-۷۶\times۱۰^{-۳}}{۴/۵\times۱۰^{-۳}}\right)=۵/۱۳\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

••۱۱- پیچهٔ مستطیل شکلی دارای N دور، طول a و پهنای b است و همان‌طور که شکل ۲۶-۳۸ نشان می‌دهد با بسامد f در

میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌چرخد. سرهای پیچه به استوانه‌های چرخانی وصل است که مقابل آنها جاروهای فلزی برای برقراری تماس قرار دارند. (الف) نشان دهید که emf القا شده در پیچه (به صورت تابعی از زمان t) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\mathscr{E} = ۲\pi f NabB\sin(۲\pi ft) = \mathscr{E}_۰ \sin(۲\pi ft)$$



شکل ۲۶-۳۸ مسئلهٔ ۱۱

این اساس مولد جریان متناوب تجارتی است. (ب) وقتی حلقه با ۶۰/۰ دور بر ثانیه در میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۵۰۰T می‌چرخد، مقدار Nab باید چقدر باشد تا emf برابر $\varepsilon_۰=۱۵۰V$ را به دست دهد؟

حل: داریم $\theta=\omega t$ و $\omega=۲\pi f$ و شار مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Phi_B = NBA\cos\theta = NBA\cos Wt = NBA\cos ۲\pi ft$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = NBab۲\pi f\sin ۲\pi ft = \varepsilon_۰ \sin ۲\pi ft$$

که در آن $\varepsilon_۰ = ۲\pi fBNab$ است.

(ب)

$$Nab = \frac{\varepsilon_۰}{۲\pi fB} = \frac{۱۵۰}{۲\pi(۶۰)(۰/۵)} = ۰/۷۹۶\,m^۲$$

●●۱۲۰- در شکل ۲۶-۳۹ یک حلقه سیم به ابعاد $L=۴۰/۰cm$ و $W=۲۵/۰cm$ در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد. مطلوب است (الف) بزرگی $\mathscr{E}$ و (ب) جهت (ساعتگرد یا پادساعتگرد- یا هیچ کدام اگر $\mathscr{E}=۰$ است) emf القا شده در حلقه در صورتی که $\vec{B}=(۴/۰۰\times۱۰^{-۲}\ T/m)y\hat{k}$ باشد. اگر $\vec{B}=(۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\ T/s)t\hat{k}$ باشد، (پ) $\mathscr{E}$ و (ت) جهت آن چیست؟ اگر $\vec{B}=(۸/۰۰\times۱۰^{-۲}\ T/m\cdot s)yt\hat{j}$ باشد، (ث) $\mathscr{E}$ و (ج) جهت آن چیست؟ اگر $\vec{B}=(۳/۰۰\times۱۰^{-۲}\ T/m.s)xt\hat{j}$ باشد، (چ) $\mathscr{E}$ و (ح) جهت آن چیست؟ در صورتی که $\vec{B}=(۵/۰۰\times۱۰^{-۲}\ T/m\cdot s)yt\hat{i}$ باشد، (خ) $\mathscr{E}$ و (د) جهت آن چیست؟

شکل ۲۶-۳۹ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) و (ب) در اینجانب $dB/dt=۰$ و چون نه مساحت و نه زاویه عمود بر سطح نیز تغییرنمی‌کنند، $\varepsilon=۰$ می‌شود و در نتیجه جریان القایی نیز صفر است.

(پ)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -LW\frac{dB}{dt}$$
$$= -(۰/۴)(۰/۲۵)(۰/۰۶) = -۶\times۱۰^{-۳}\ V$$

(ت) میدان خارجی افزایشی و برون سو است. بنابراین، طبق قانون لنز، جریان القایی باید به گونه‌ای باشد که این میدان را تضعیف کند. جهت انجام این امر جریان القایی باید ساعتگرد باشد تا میدان حاصل از آن درون سو و میدان خارجی را تضعیف کند. پس، جریان القایی ساعتگرد است.

(ث)

$$\Phi_B = \int BdA = L\int Bdy = (۰/۴)(۸\times۱۰^{-۲})t\int_۰^{W=۰/۲۵} ydy$$
$$= (۰/۴)(۸\times۱۰^{-۲})\frac{۱}{۲}(۰/۲۵)^۲t = ۱\times۱۰^{۳}\ t$$

و با استفاده از قانون القا فارادی داریم

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -۱\times۱۰^{۳}\ V \Rightarrow |\varepsilon| = ۱۰^{-۳}\ mV$$

(ج) و (چ) میدان در جهت $\hat{j}$ و عمود بر سطح در راستای $\hat{k}$ است. پس شار مغناطیسی عبوری از حلقه صفر و در نتیجه نیروی محرکه القایی برابر صفر بوده و لذا جریان القایی ایجاد نمی‌شود.

(خ) و (د) میدان در جهت $\hat{i}$ و عمود بر سطح در راستای $\hat{k}$ است. پس شار مغناطیسی عبوری از حلقه صفر و در نتیجه نیروی محرکه القایی برابر صفر بوده و لذا جریان القایی ایجاد نمی‌شود.

●●۱۳۰- ILW صد دور سیم مسی (عایق‌بندی شده) دور یک هستهٔ استوانه‌ای چوبی با سطح مقطعی به مساحت $۱/۲\times۱۰^{-۳}\ m^۲$ پیچیده شده است. دو انتها به مقاومتی وصل شده‌اند. مقاومت کل مدار $۱۳/۰\Omega$ است. اگر یک میدان مغناطیسی طولی یکنواخت خارجی در هسته از $۱/۶۰T$ در یک جهت به $۱/۶۰T$ را در جهت مقابل تغییر کند، در این تغییر چه مقدار بار از یک نقطه در مدار می‌گذرد؟

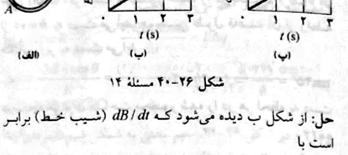
حل: با استفاده از قانون آمپر و همچنین قانون فارادی خواهیم داشت

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{۱}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

از طرف دیگر $q(t) = \int idt$ است لذا با قرار دادن i در آن داریم

$$q(t) = -\frac{۱}{R}\int_۰^t \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{NA}{R}[B(۰) - B(t)]$$
$$= \frac{(۱۰۰)(۱/۲\times۱۰^{-۳})}{۱۳}[۱/۶ - (-۱/۶)] = ۲/۹۵\times۱۰^{-۲}\ C$$

●●۱۴۰- در شکل ۲۶-۴۰ الف، بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با زمان t مطابق شکل ۲۶-۴۰ ب افزایش می‌یابد. یک حلقهٔ رسانای دایره‌ای به مساحت $۸/۰\times۱۰^{-۴}\ m^۲$ در صفحهٔ کاغذ در این میدان قرار دارد. مقدار بار q که از نقطهٔ A روی حلقه می‌گذرد برحسب تابعی از t در شکل ۲۶-۴۰ پ نشان داده شده است. مقاومت حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۴۰ مسئلهٔ ۱۴

حل: از شکل ب دیده می‌شود که dB/dt (شیب خط) برابر است با

$$\frac{dB}{dt} = \frac{۹\times۱۰^{-۳}}{۳} = ۲\times۱۰^{-۳}\ T/s$$

با توجه به قانون فارادی داریم

$$\varepsilon = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = A\frac{dB}{dt} = (۸\times۱۰^{-۴})(۳\times۱۰^{-۳}) = ۲/۴\times۱۰^{-۶}\ V$$

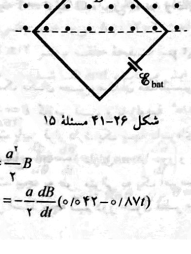
از طرف دیگر از شکل (پ) جریان عبوری i از حلقه با dq/dt (شیب خط) داده می‌شود

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{۶\times۱۰^{-۳}}{۳} ۲\times۱۰^{-۳}\ A$$

آنگاه داریم

$$R = \frac{\varepsilon}{i} = \frac{۲/۴\times۱۰^{-۶}}{۲\times۱۰^{-۳}} = ۰/۰۰۱۲\Omega$$

●●۱۵۰- GO یک حلقه سیم مربعی شکل به ضلع $۲/۰۰m$ عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت است و همان‌طور که در شکل ۲۶-۴۱ مشاهده می‌شود نصف حلقه در میدان قرار دارد. حلقه شامل یک باتری آرمانی با emf برابر $\mathscr{E}=۲۰/۰V$ است. اگر بزرگی میدان مغناطیسی با زمان با رابطهٔ $B=۰/۰۴۲۰-۰/۸۷۰t$ که B برحسب تسلا و t برحسب ثانیه است. تغییر کند، (الف) emf خالص در مدار چقدر است؟ (ب) جهت و جریان (خالص) دور حلقه چیست؟



شکل ۲۶-۴۱ مسئلهٔ ۱۵

حل: (الف)

$$\Phi_B = BA = \frac{a^۲}{۲}B$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{a}{۲}\frac{dB}{dt}(۰/۰۴۲-۰/۸۷t)$$

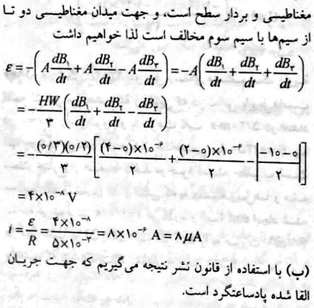
$$= -\frac{(۲)^۲}{۲}(-۰/۸۷V) = ۱/۷۴V$$

میدان مغناطیسی خارجی به سمت رو به بیرون صفحه و در حال کاهش است، در نتیجه شار در حال کاهش است. جریان القایی پادساعتگرد باید باشد تا میدان را تقویت کند. در نتیجه emf القا شده در مدار همان جهت emf را خواهد داشت و بنابراین emf کل برابر است با:

$$\varepsilon_{کل} = \varepsilon_{القایی} + \varepsilon_{باتری} = ۱/۷۴ + ۲۰ = ۲۱/۷\ V$$

(ب) جریان خالص در جهت emf کل، یعنی پاد ساعتگرد است.

●●۱۶۰- شکل ۲۶-۴۲ الف سیمی را نشان می‌دهد که به شکل مستطیل $(W=۲۰cm, H=۳۰cm)$ است و $۵/۰m\Omega$ مقاومت دارد. سطح آن به سه ناحیهٔ یکسان با میدان‌های مغناطیسی $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ تقسیم شده است. میدان‌ها در همهٔ ناحیه‌ها یکنواخت است و همان‌طور که مشخص شده به سمت خارج و داخل صفحه هستند. شکل ۲۶-۴۲ ب مؤلفه‌های z مربوط به B_z سه میدان با زمان t را به دست می‌دهد، مقیاس محور قائم با $B_z=۴/۰\mu T$ و $B_b=-۲/۵B_s$ و مقیاس محور افقی با $t_s=۲/۰s$ مشخص شده‌اند مطلوب است. (الف) بزرگی و (ب) جهت جریان القا شده در سیم.



شکل ۲۶-۴۲ مسئلهٔ ۱۶

حل: (الف) چون شار، حاصل‌ضرب داخلی بردار میدان مغناطیسی و بردار سطح است، و جهت میدان مغناطیسی دو تا از سیم‌ها با سیم سوم مخالف است لذا خواهیم داشت

$$\varepsilon = -\left(A\frac{dB_۱}{dt} + A\frac{dB_۲}{dt} - A\frac{dB_۳}{dt}\right) = -A\left(\frac{dB_۱}{dt} + \frac{dB_۲}{dt} + \frac{dB_۳}{dt}\right)$$
$$= -\frac{HW}{۳}\left(\frac{dB_۱}{dt} + \frac{dB_۲}{dt} - \frac{dB_۳}{dt}\right)$$
$$= -\frac{(۰/۳)(۰/۲)}{۳}\left[\frac{(۴-۰)\times۱۰^{-۶}}{۲} + \frac{(۲-۰)\times۱۰^{-۶}}{۲} - \left|\frac{-۱۰-۰}{۲}\right|\right]$$
$$= ۴\times۱۰^{-۸}\ V$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۴\times۱۰^{-۸}}{۵\times۱۰^{-۳}} = ۸\times۱۰^{-۶}\ A = ۸\mu A$$

(ب) با استفاده از قانون نشر نتیجه می‌گیریم که جهت جریان القا شده پادساعتگرد است.

●●۱۷- یک حلقهٔ دایره‌ای کوچک به مساحت $2.00\,\text{cm}^2$ در صفحهٔ یک حلقهٔ دایره‌ای بزرگ به شعاع $1.00\,\text{m}$ و هم مرکز با آن قرار دارد. جریان در حلقهٔ بزرگ با آهنگ یکنواخت در مدت $1.00\,\text{s}$ که از $t=0$ شروع می‌شود، از $200\,\text{A}$ به $-200\,\text{A}$ تغییر می‌کند (تغییر در جهت). بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز حلقهٔ کوچک براثر جریان در حلقهٔ بزرگ در (الف) $t=0$، (ب) $t=0.500\,\text{s}$ و (پ) $t=1.00\,\text{s}$، چقدر است؟ (ت) آیا از $t=0$ تا $t=1.00\,\text{s}$، $\vec{B}$ معکوس می‌شود؟ چون حلقهٔ داخلی کوچک است فرض کنید که میدان $\vec{B}$ روی سطح آن یکنواخت است. (ث) در $t=0.500\,\text{s}$ مقدار emf القا شده در حلقهٔ کوچک چقدر است؟

حل: میدان حلقه بزرگتر که با زیرنویس ۱ مشخص می‌کنیم در مرکز آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_1=\frac{\mu_0 i}{2R}$$

(الف) به ازای $t=0$، $i=200\,\text{A}$ است

$$B_1=\frac{(4\pi\times10^{-7})(200)}{(2)(1)}=1.26\times10^{-4}\,\text{T}$$

(ب) چون جریان به طور یکنواخت تغییر می‌کند لذا در $t=0.5\,s$، $i=0$ است. و در نتیجه $B_1=0$

(پ) به ازای $t=1\,s$، $i=-200\,\text{A}$ است

$$B_1=\frac{(4\pi\times10^{-7})(-200)}{(2)(1)}=-1.26\times10^{-4}\,\text{T}$$

میدان در خلاف جهت حالت (الف) است.

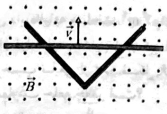
(ت) از مقایسه جواب (الف) و (پ) دیده می‌شود که جهت میدان وارونه شده است. (ث) از قانون القا فارادی و شاری که از حلقه دیگر می‌گذرد خواهیم داشت:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}=-A\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

که A مساحت حلقه کوچک و برابر $2\times10^{-4}\,m^2$ است. لذا داریم

$$\varepsilon=-(2\times10^{-4})\left(\frac{-1.26\times10^{-4}-1.26\times10^{-4}}{(1)}\right)$$
$$=5.04\times10^{-8}\,\text{V}$$

●●۱۸- در شکل ۲۶-۴۳، دو ریل رسانای مستقیم یک زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند. میلهٔ رسانایی که در تماس با ریل‌هاست در $t=0$ از رأس شروع و با سرعت ثابت $5.20\,\text{m/s}$ در امتداد آنها حرکت می‌کند. یک میدان مغناطیسی با $B=0.350$ به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ موجود است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شاری که از مثلثی که به وسیلهٔ ریل‌ها و میله ساخته می‌شود در $t=3.00\,\text{s}$ می‌گذرد و (ب) emf ایجاد شده در دور مثلث در آن زمان. (پ) اگر emf را به صورت $\mathscr{E}=at^n$ بنویسیم که a و n ثابت‌اند، مقدار n چقدر است؟



شکل ۲۶-۴۳ مسئلهٔ ۱۸

حل: (الف) اگر مثلث محصور شده را در بگیریم ارتفاع آن از $h=vt$ به دست می‌آید. همچنین طول قاعده آن از رابطه مثلثاتی زیر به دست می‌آید

$$\tan 45^\circ=\frac{\ell/2}{h}\Rightarrow \ell=2h=2vt$$

در نتیجه می‌توان مساحت محصور شده را در هر لحظه به دست آورد

$$A=\frac{1}{2}(\text{قاعده})(\text{ارتفاع})=\frac{1}{2}(2vt)(vt)=v^2t^2$$

از آنجا شار میدان مغناطیسی چنین است

$$\Phi_B=BA=BV^2t^2=(0.35)(5.2)^2t^2=9.46t^2$$

که به ازای $t=3\,s$ داریم $\Phi_B=85.18\,\text{T}\cdot\text{m}^2$

(ب) بزرگی نیروی محرکه برابر است با

$$\varepsilon=\frac{d\Phi_B}{dt}=9.46\frac{d}{dt}(t^2)=18.9\,t$$

که به ازای $t=3\,s$ داریم $\varepsilon=56.8\,\text{V}$

(پ) اگر $\varepsilon=at^n$ را با نتیجه قسمت (ب) یعنی $\varepsilon=18.9t$، مقایسه کنیم در می‌یابیم که $n=1$ است.

●●۱۹- ILW یک مولد الکتریکی شامل ۱۰۰ دور سیم است که به شکل یک حلقهٔ مستطیلی $50.0\,\text{cm}$ در $30.0\,\text{cm}$ آمده است و به طور کامل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $B=3.50\,\text{T}$ قرار دارد. $\vec{B}$ در ابتدا بر صفحهٔ پیچه عمود است. وقتی حلقه ۱۰۰۰ دور بر دقیقه حول محوری عمود بر $\vec{B}$ بچرخد، مقدار بیشینه emf تولید شده چقدر است؟

حل:

$$\Phi_B=NBA\cos\theta=NBA\cos\omega t=NBA\cos 2\pi ft$$
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=NBA2\pi f\sin 2\pi ft$$
$$=(100)(3.5)(0.15)^2(2\pi)(16.7)\sin 2\pi ft$$
$$(5.5\times10^3)\sin 2\pi ft$$

در نتیجه بیشینه emf تولید شده یعنی دامنه ولتاژ القایی برابر است با

$$\varepsilon_m=5.5\times10^3\,V$$

●●۲۰- در یک مکان معین، میدان مغناطیسی زمین دارای بزرگی $B=0.590$ گاوس است و با زاویهٔ 70.0° نسبت به افق و به سمت پایین قرار دارد. یک پیچهٔ دایره‌ای افقی تخت سیمی با شعاع $10.0\,\text{cm}$ دارای ۱۰۰۰ دور و مقاومت کل $85.0\,\Omega$ است. پیچه به طور متوالی به یک آمپرسنج با مقاومت $150\,\Omega$ متصل است. پیچه نیم دور حول قطر می‌چرخد به طوری که دوباره افقی می‌شود. در طی این چرخش چقدر بار از آمپرسنج می‌گذرد؟

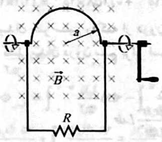
حل:

$$\theta=90^\circ-70^\circ=20^\circ$$
$$\Phi_B=NBA\cos\theta$$
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{NBA[\cos\theta-(-\cos\theta)]}{\Delta t}=-\frac{2NBA\cos\theta}{\Delta t}$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$|\varepsilon|=Ri=R\frac{\Delta q}{\Delta t}\qquad \frac{2NBA\cos\theta}{\Delta t}=R\Delta q$$
$$\Delta q=\frac{2NBA\cos\theta}{R}=\frac{(2)(1000)(0.59\times10^{-4})(0.1)^2\cos 20^\circ}{85+140}$$
$$\Delta q=1.55\times10^{-5}\,\text{C}$$

●●۲۱- در شکل ۲۶-۴۴، سیم سفتی به شکل نیم‌دایره‌ای به شعاع $a=2.0\,\text{cm}$ خم شده است و با تندی زاویه‌ای ثابت ۴۰ دور بر ثانیه در میدان مغناطیسی یکنواخت $20\,\text{mT}$ می‌چرخد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ emf القا شده در حلقه.



شکل ۲۶-۴۴ مسئله ۲۱

حل: (الف)

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(40\,\frac{\text{rev}}{\text{s}})(2\pi)}{2\pi}=40\,\text{Hz}$$

(ب)

$$\Phi_B=BA\cos\theta=B\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\cos\omega t=B\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\cos 2\pi ft$$
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=B\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2(2\pi f)\sin 2\pi ft$$

در این صورت دامنه emf برابر است با

$$\varepsilon_m=B\pi^2a^2f=(0.02)\pi^2(0.02)^2(40)=3.2\times10^{-3}\,\text{V}$$

●●۲۲- یک حلقهٔ مستطیلی ($1.5\,\text{m}^2$=مساحت) در میدان مغناطیسی یکنواخت $B=0.20\,\text{T}$ می‌چرخد. وقتی زاویهٔ بین میدان و عمود بر صفحهٔ حلقه برابر $\pi/2$ است و با $0.60\,\text{rad/s}$ افزایش می‌یابد، emf القا شده در حلقه چقدر است؟

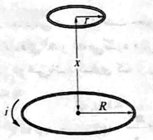
حل:

$$\Phi_B=BA\cos\theta$$
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{d\Phi_B}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=BA\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

که به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ برای $\sin\theta$ داریم

$$\varepsilon=(0.2)(0.15)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)(0.6)=0.018\,\text{V}$$

●●۲۳- SSM شکل ۲۶-۴۵ دو حلقهٔ سیم موازی با محور مشترک را نشان می‌دهد. حلقهٔ کوچکتر (با شعاع r) بالای حلقهٔ بزرگتر (با شعاع R) و به فاصلهٔ $x>>R$ قرار دارد. در نتیجه، میدان مغناطیسی حاصل از جریان پادساعتگرد i در حلقهٔ بزرگتر، تقریباً در سراسر حلقهٔ کوچکتر ثابت است. فرض کنید که x با آهنگ ثابت $dx/dt=v$ افزایش می‌یابد. (الف) رابطه‌ای را برای شار مغناطیسی که از مساحت احاطه شده به وسیلهٔ حلقهٔ کوچکتر می‌گذرد برحسب تابعی از x به دست آورید. (راهنمایی: به معادلهٔ ۲۹-۲۷ نگاه کنید.) در حلقهٔ کوچکتر مطلوب است (ب) رابطه‌ای برای emf القایی و (پ) جهت جریان القایی.



شکل ۲۶-۴۵ مسئلهٔ ۲۳

حل: (الف) میدان مغناطیسی حاصل از یک حلقه جریان در نقطه‌ای روی محور آن و در فاصله x از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

چون $R<<x$ است در مخرج از آن صرف‌نظر می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$B\approx\frac{\mu_0 iR^2}{2x^3}$$

که جهت آن طبق قاعده دست راست به سمت بالا است. این میدان از سطح حلقه کوچک عبور می‌کند

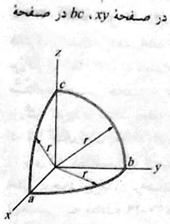
$$\Phi_B=BA=\frac{\mu_0 iR^2}{2x^3}(\pi r^2)$$

(ب) emf القا شده برابر است با:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\left[\frac{\mu_0 i\pi r^2R^2}{2}\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=-\left[\frac{\mu_0 i\pi r^2R^2}{2}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{3\mu_0 i\pi r^2R^2}{2x^4}$$

(پ) چون حلقه کوچک در حال دور شدن است لذا شاری که از آن می‌گذرد کاهش می‌یابد، بنابراین جهت جریان القایی باید به گونه‌ای باشد که میدان القایی میدان حلقه بزرگ را تقویت کند، لذا جهت جریان حلقه کوچکتر باید در همان جهت جریان حلقه بزرگتر یعنی پادساعتگرد باشد.

●●۲۴- سیمی همان‌طور که در شکل ۲۶-۴۶ نشان داده شده به سه قسمت دایره‌ای به شعاع r=۱۰cm خم شده است. هر قسمت یک ربع دایره است، ab در صفحهٔ xy، bc در صفحهٔ yz و ca در صفحه zx قرار دارند. (الف) اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در جهت مثبت محور x باشد، وقتی B با آهنگ ۳/۰T/s افزایش یابد، بزرگی emf ایجاد شده در سیم چقدر است؟ (ب) جریان در قسمت bc در کدام جهت است؟



شکل ۲۶-۴۶ مسئلهٔ ۲۴

حل: (الف) میدان مغناطیسی در جهت مثبت محور x ها است. شاری که از ربع دایره‌های ac و ab می‌گذرد صفر است چون میدان B موازی این دو می‌باشد شاری که از ربع حلقه bc می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi_B = BA = B\frac{\pi r^۲}{۴}$$

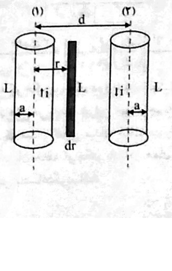
$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{\pi r^۲}{۴}\frac{dB}{dt}$$

$$= \frac{۱}{۴}\pi(۰/۱)^۲(۳\times۱۰^{-۳}) = ۲/۳۶\times۱۰^{-۵}\ \text{V}$$

(ب) چون B در حال افزایش است لذا جهت جریان القایی در bc باید به گونه‌ای باشد که میدان مغناطیسی حاصل از آن، این میدان را تضعیف کند. بنابراین جهت جریان در bc باید از c به سمت b باشد.

●●●۲۵- دو سیم مسی موازی و دراز به قطر ۳۲/۵mm حامل جریان‌های ۱۰A در جهت‌های مخالف‌اند. (الف) با فرض اینکه محور مرکزی آنها ۲۰mm از هم فاصله دارند، شار مغناطیسی به ازای هر متر سیم را که در فضای بین دو محور سیم‌ها وجود دارد حساب کنید. (ب) چه کسری از این شار داخل سیم‌ها قرار دارد؟ (پ) قسمت (الف) را برای جریان‌های موازی، تکرار کنید.

حل:



(الف) میدان حاصل از سیم (۱) در فضای بین دو سیم تا محور سیم (۲) برابر است با:

$$B_۱ = \frac{\mu_0 i}{۲\pi r}$$

شاری که از عنصر سطح نشان داده می‌گذرد برابر است با:

$$d\Phi_۱ = B_۱ dA = \frac{\mu_0 i}{۲\pi r}Ldr = \frac{\mu_0 iL}{۲\pi}\frac{dr}{r}$$

$$\Phi_۱ = \frac{\mu_0 iL}{۲\pi}\left[\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} + \int_{d-a}^{d}\frac{dr}{r}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 iL}{۲\pi}\ln\frac{d-a}{a} + \frac{\mu_0 iL}{۲\pi}\ln\frac{d}{d-a}$$

جهت میدان حاصل از سیم (۲) هم جهت با میدان سیم (۱) و درونسو و برابر $\Phi_۱$ می‌باشد لذا داریم:

$$\Phi_B = ۲\Phi_۱ = \frac{\mu_0 iL}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} + \frac{\mu_0 iL}{\pi}\ln\frac{d}{d-a}$$

جمله اول مربوط به شار عبوری از بین دو سیم است و جمله دوم مربوط به شار میدان یک سیم است که درون سیم دیگر می‌گذرد. با قرار دادن مقادیر داده شده در این رابطه خواهیم

$$\frac{\Phi_B}{L} = ۱۰/۸۳\times۱۰^{-۶} + ۰/۲۵۸\times۱۰^{-۶} = ۱۱/۱\times۱۰^{-۶}\ \text{Wb/m}$$

حال باید شار میدان هر سیم را که از درون خود آن سیم می‌گذرد حساب کنیم. میدان درون سیم برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 iL}{۲\pi a^۲}$$

$$d\Phi'_۱ = BdA = \frac{\mu_0 ir}{۲\pi a^۲}Ldr$$

$$\Phi'_۱ = \frac{\mu_0 iL}{۲\pi a^۲}\int_0^a rdr = \frac{\mu_0 iLa^۲}{۴\pi a^۲} = \frac{\mu_0 iL}{۴\pi}$$

$$\Phi'_{B\ \text{دوسیم}} = ۲\Phi'_۱ = \frac{\mu_0 iL}{۲\pi}$$

$$\frac{\Phi'_B}{L} = \frac{\mu_0 i}{۲\pi} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰)}{۲\pi} = ۲\times۱۰^{-۶}\ \text{Wb/m}$$

در نتیجه شار کل که از بین دو محور می‌گذرد برابر است با:

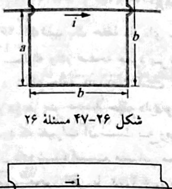
$$\Phi_{B\ \text{کل}} = ۱۱/۱\times۱۰^{-۶} + ۲\times۱۰^{-۶} = ۱۳/۱\times۱۰^{-۶}\ \text{Wb/m}$$

(ب)

$$\frac{\Phi_{Bi}}{\Phi_{B\ \text{کل}}}\times۱۰۰ = \frac{۲\times۱۰^{-۶} + ۰/۲۵۸\times۱۰^{-۶}}{۱۳/۱\times۱۰^{-۶}} = \%۱۷/۴$$

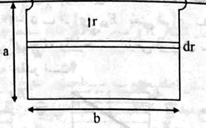
(پ) اگر جریان‌ها هم سو باشند جهت میدان‌ها خلاف یکدیگر بوده و با توجه به تقارن موجود یکدیگر را خنثی می‌کنند و شار کل صفر است.

●●●۲۶- برای وضعیت نشان داده شده در شکل ۲۶-۴۷، a=۱۲/۰cm و b=۱۶/۰cm است. جریان در سیم مستقیم دراز با رابطهٔ i=۴/۵۰$t^۲$−۱۰/۰t داده می‌شود که i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. (الف) در t=۳/۰۰s مقدار emf در حلقهٔ مربعی را به دست آورید. (ب) جریان القا شده در حلقه در کدام جهت است؟



شکل ۲۶-۴۷ مسئلهٔ ۲۶

حل:



(الف) توجه داریم که برای بخش بالایی سیم میدان به سمت بیرون شار مثبت بوده و برای بخش پایین سیم میدان به سمت داخل و شار منفی است. برای سیم دراز داریم

$$B = \frac{\mu_0 i}{۲\pi r}$$

$$d\Phi_B = BdA = \frac{\mu_0 i}{۲\pi r}bdr$$

$$\Phi_B = \Phi_{\text{بالایی}} + \Phi_{\text{پایینی}} = \int_0^{b-a}\frac{\mu_0 i}{۲\pi r}bdr - \int_0^{a}\frac{\mu_0 i}{۲\pi r}bdr$$

$$= \int_0^{b-a}\frac{\mu_0 ib}{۲\pi}\frac{dr}{r} + \int_a^{0}\frac{\mu_0 ib}{۲\pi}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 ib}{۲\pi}\int_0^{b-a}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 ib}{۲\pi}\ell m\frac{b-a}{a}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{di}\frac{di}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{۲\pi}\ln\frac{b-a}{a}\frac{di}{dt}$$

$$= -\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۱۶)}{(۲\pi)}\ln\frac{(۰/۱۶-۰/۱۲)}{(۰/۱۲)}(۹t-۱۰)$$

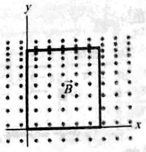
$$= ۳/۵۲\times۱۰^{-۸}\,(۹t-۱۰)$$

$$t = ۳s \quad \varepsilon = ۳/۵۲\times۱۰^{-۸}\,(۲۷-۱۰) = ۵/۹۸\times۱۰^{-۷}\ \text{V}$$

(ب)

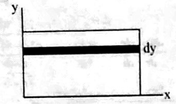
$$\frac{di}{dt} = ۹t - ۱۰ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۰}{۹} = ۱/۱۱\text{s}$$

●●●۲۷- ILW در شکل ۲۶-۴۸ یک حلقهٔ مربعی شکل سیمی دارای اضلاعی به طول ۲/۰cm است. میدان مغناطیسی به سمت خارج از صفحه کاغذ است و بزرگی آن با رابطهٔ B=۴/۰$t^۲y$ داده می‌شود که B برحسب تسلا، t برحسب ثانیه و y برحسب متر است. در t=۲/۵s مطلوب است محاسبهٔ (الف) بزرگی و (ب) تعیین جهت emf القا شده در حلقه.



شکل ۲۶-۴۸ مسئلهٔ ۲۷

حل: عنصر سطح را مطابق شکل در نظر می‌گیریم



$$d\Phi_B = BdA = (۴t^۲y)ady$$

$$\Phi_B = ۴t^۲a\int_0^a ydy = ۲t^۲a^۳$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -۴a^۳t$$

(الف) به ازای $t = ۲/۵s$ داریم:

$$\varepsilon = -(۴)(۲\times۱۰^{-۲})^۳(۲/۵) = ۸\times۱۰^{-۵}\ \text{V}$$

(ب) چون شار در حال افزایش است. جهت جریان القایی طوری است که میدان حاصل از آن با افزایش مخالفت کند و میدان به سمت داخل باشد درنتیجه جریان و نیروی محرکه ساعتگرد است.

●●●۲۸- در شکل ۲۶-۴۹ یک حلقهٔ مستطیلی شکل سیمی به در ازای a=۲/۲cm ، پهنای b=۰/۸۰cm و مقاومت R=۰/۴۰mΩ در نزدیکی سیم بینهایت دراز حامل جریان i=۴/۷A قرار دارد. حال حلقه را با تندی ثابت v=۳/۲mm/s از سیم دور می‌کنیم. وقتی مرکز حلقه در فاصلهٔ r=۱/۵b قرار دارد، مطلوب است (الف) بزرگی شار مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد و (ب) جریان القا شده در حلقه.

شکل ۲۶-۴۹ مسئلهٔ ۲۸

حل:

$$d\Phi_B = BdA = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi y}(ady)$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_\circ ia}{۲\pi}\int_{r-b/۲}^{r+b/۲}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_\circ ia}{۲\pi}\ln\left(\frac{r+b/۲}{r-b/۲}\right)$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_\circ ia}{۲\pi}\ln\left(\frac{۲r+b}{۲r-b}\right)$$

که به ازای مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$\Phi_B = ۱/۴\times۱۰^{-۸}\ Wb$$

(ب) نخست از قانون القا فارادی نیروی محرکه القایی را به دست می‌آوریم

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_\circ ia}{۲\pi}\frac{\frac{۲(۲r-b)-۲(۲r+b)}{(۲r-b)^۲}}{\frac{۲r+b}{۲r-b}}(v)$$

$$= \frac{\mu_\circ ia}{۲\pi}\frac{۴bv}{(۲r-b)(۲r+b)} = \frac{۲\mu_\circ iabv}{\pi(۴r^۲-b^۲)^۲}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

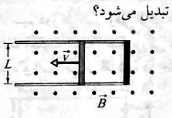
$$\varepsilon = ۴/۱۴\times۱۰^{-۹}\ V$$

اکنون می‌توان جریان القا شده را به دست آورد:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۴/۱۴\times۱۰^{-۹}}{۰/۴\times۱۰^{-۳}} = ۱/۰۳\times۱۰^{-۵}\ A$$

بخش ۲۶-۵ القایش و تبدیل انرژی

۲۹●- در شکل ۲۶-۵۰، یک میلهٔ فلزی با سرعت $\vec{v}$ در امتداد دو ریل فلزی موازی حرکت داده می‌شود، ریل‌ها در یک انتها با نواری فلزی به هم متصل‌اند. یک میدان مغناطیسی به بزرگی $B=۰/۳۵۰T$، به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ موجود است. (الف) اگر فاصلهٔ بین ریل‌ها $L = ۲۵/۰cm$ تندی میله $۵۵/۰cm/s$ باشد، emf ایجاد شده چقدر است؟ (ب) اگر مقاومت میله $۱۸/۰\Omega$ و مقاومت ریل‌ها و اتصال آنها ناچیز باشد، جریان در میله چقدر است؟ (پ) انرژی با چه آهنگی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۶-۵۰ مسئله‌های ۲۹ و ۳۵

حل: (الف) بزرگی شار مغناطیسی برابر است با:

$$\Phi_B = \int BdA = B\int_\circ^x Ldx = BLx$$

و از قانون القا فارادی داریم:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = BLv$$

$$= (۰/۳۵)(۰/۲۵)(۰/۵۵) = ۰/۰۴۸۱\ V$$

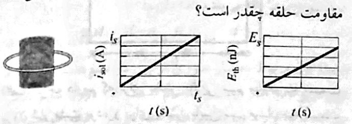
(ب) برای جریان القایی نیز داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۰/۰۴۸۱}{۱۸} = ۲/۶۷\times۱۰^{-۳}\ A$$

(پ) آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر است با:

$$P_{th} = Ri^۲ = (۱۸)(۲/۶۷\times۱۰^{-۳})^۲ = ۱/۲۹\times۱۰^{-۴}\ W$$

۳۰●- در شکل ۲۶-۵۱ الف یک حلقهٔ دایره‌ای سیمی به طور هم محور با یک سیملوله و در صفحهٔ عمود بر محور مرکزی سیملوله قرار دارد. شعاع حلقه $۶/۰۰cm$ است. شعاع سیملوله برابر $۲/۰۰cm$ و در هر متر ۸۰۰۰ حلقه دارد و جریان متغیر i_{sol} از آن می‌گذرد که تغییرات آن نسبت به زمان t در شکل ۲۶-۵۱ ب نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $i = ۱/۰۰A$ و مقیاس محور افقی با $t_s = ۲/۰s$ مشخص شده است. شکل ۲۶-۵۱ پ انرژی E_{th}، یعنی انرژی تبدیل شده به انرژی گرمایی در حلقه را برحسب تابعی از زمان نشان می‌دهد. مقاومت حلقه چقدر است؟



شکل ۲۶-۵۱ مسئلهٔ ۳۰

حل: آهنگ تولید انرژی گرمایی $\varepsilon^۲/R$ است و از طرف دیگر طبق قانون فارادی بزرگی نیروی محرکه القایی برای یک تک حلقه برابر است با:

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_B}{dt} = A\frac{dB}{dt}$$

میدان برای یک سیملوله آرمانی در خارج آن صفر و در داخل آن برابر است با $B = \mu_\circ i_{sol}n$. لذا داریم:

$$|\varepsilon| = \mu_\circ nA_{sol}\frac{di_{sol}}{dt}$$

از نمودار شکل ب دیده می‌شود که $di_{sol/dt} = ۰/۵A/s$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$|\varepsilon| = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸۰۰۰)\pi(۰/۰۲)^۲(۰/۵) = ۶/۳۱\times۱۰^{-۶}\ V$$

حل با استفاده از $P_{th} = dE_{th/dt} = \varepsilon^۲/R$ که با استفاده از نمودار $dE_{th/dt} = ۴۰\times۱۰^{-۹}\ J/s$ است و در نتیجه داریم:

$$R = \frac{\varepsilon^۲}{dE_{th/dt}} = \frac{(۶/۳۱\times۱۰^{-۶})}{(۴۰\times۱۰^{-۹})} = ۰/۹۸\times۱۰^{-۳}\ \Omega$$

۳۱●- SSM ILW اگر یک سیم مسی به طول $۵۰/۰cm$ ($۱/۰۰mm$ = قطر) که به شکل یک حلقهٔ دایره‌ای در آمده است بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت که با آهنگ ثابت $۱۰/۰mT/s$ افزایش می‌یابد عمود باشد، با چه آهنگی انرژی گرمایی در حلقه ایجاد می‌شود؟

حل: باید رابطه بین آهنگ تولید انرژی گرمایی و آهنگ تغییر میدان مغناطیسی باشیم. محیط حلقه طول سیم مسی است. شعاع حلقه برابر است با

$$r = \frac{L}{۲\pi} = \frac{۰/۵}{(۲)(۳/۱۴)} = ۷/۹۶\times۱۰^{-۲}\ m$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt}$$

$$Ri = \pi r^۲\frac{dB}{dt} \Rightarrow i = \frac{\pi r^۲}{R}\frac{dB}{dt}$$

که R مقاومت الکتریکی سیم است و داریم

$$R = \rho\frac{L}{A} = (۱/۷\times۱۰^{-۸})\frac{۰/۵}{\pi(۰/۵\times۱۰^{-۳})^۲} = ۱/۰۸۵\times۱۰^{-۲}\ \Omega$$

از طرف دیگر داریم

$$P = Ri^۲ = R\left(\frac{\pi r^۲}{R}\frac{dB}{dt}\right)^۲$$

که با قرار دادن مقدار R و سایر مقادیر داده شده، خواهیم داشت

$$P = ۳/۶۸\times۱۰^{-۶}\ W$$

۳۲●- یک آنتن حلقه‌ای به مساحت $۲/۰۰cm^۲$ و مقاومت $۵/۲۱\mu\Omega$ بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $۱۷/۰\mu T$ عمود است. در ۲/۹۶s، بزرگی میدان به صفر کاهش می‌یابد. براثر تغییر در میدان چه مقدار انرژی گرمایی در حلقه ایجاد می‌شود.

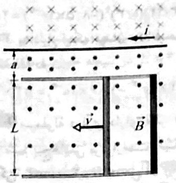
حل: انرژی گرمایی از رابطه $E_{th} = P_{th}\Delta t$ به دست می‌آید و با استفاده از قانون القا فارادی خواهیم داشت

$$E_{th} = \left(\frac{\varepsilon^۲}{R}\right)\Delta t = \frac{۱}{R}\left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right)^۲\Delta t = \frac{۱}{R}\left(-A\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^۲\Delta t = \frac{A^۲B^۲}{R\Delta t}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

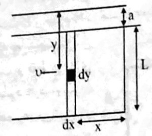
$$E_{th} = ۷/۵\times۱۰^{-۱۰}\ J$$

۳۳●●- شکل ۲۶-۵۲ میله‌ای به طول $L=۱۰/۰cm$ را نشان می‌دهد که با تندی ثابت $v=۵/۰۰m/s$ روی دو ریل افقی حرکت داده می‌شود. میله، ریل‌ها و نوار متصل کننده در سمت راست یک حلقهٔ رسانا را تشکیل می‌دهند. مقاومت میله $۰/۴۰۰\Omega$ و مقاومت بقیهٔ حلقه قابل چشم‌پوشی است. جریان $i=۱۰۰A$ در سیم مستقیم درازی که به فاصلهٔ $a=۱۰/۰mm$ از حلقه واقع است یک میدان مغناطیسی (غیر یکنواخت) را از حلقه می‌گذراند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) emf و (ب) جریان القا شده در حلقه. (پ) با چه آهنگی انرژی گرمایی در میله ایجاد می‌شود؟ (ت) برای اینکه میله با تندی ثابت به حرکت ادامه دهد، بزرگی نیرویی که باید اعمال شود چقدر است؟ (ث) با چه آهنگی این نیرو روی میله کار انجام می‌دهد؟



شکل ۲۶-۵۲ مسئلهٔ ۳۳

حل:



با توجه به شکل شاری که از عنصر سطح $dxdy$ می‌گذرد برابر است با

$$\Phi_B = \int BdA = \int_\circ^x\int_a^{a+L}\frac{\mu_\circ i}{۲\pi y}dxdy = \frac{\mu_\circ ix}{۲\pi}\int_a^{a+L}\frac{dy}{y}$$

$$= \frac{\mu_\circ ix}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

(الف) بزرگی نیروی محرکه القایی برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi}\left(\frac{dx}{dt}\right)\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_\circ iV}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهم داشت $\varepsilon = ۲/۴\times۱۰^{-۴}\ V$.

(ب) جریان القایی نیز برابر است با:

$$i' - \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۲/۴\times۱۰^{-۴}}{۰/۴} = ۶\times۱۰^{-۴}\ A$$

(پ)

$$P = Ri'^۲ = (۰/۴)(۶\times۱۰^{-۴})^۲ = ۱/۴۴\times۱۰^{-۷}\ W$$

(ت) چون میله با سرعت ثابت حرکت می‌کند، نیروی خالص وارد بر آن برابر با صفر است پس، بزرگی نیروی عامل خارجی باید برابر با بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر سیم، و جهت آن در خلاف جهت این نیرو باشد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر یک عنصر دیفرانسیلی حامل جریان القایی i' از میله به ضخامت dy و فاصله y از سیم بلند برابر است با

$$dF_B = i'Bdy = i'\left(\frac{\mu_\circ i}{۲\pi y}\right)dy$$

$$F_B = \frac{\mu_\circ ii'}{۲\pi}\int_a^{a+L}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_\circ ii'}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $F_B = ۲/۸۷\times۱۰^{-۸}\ N$

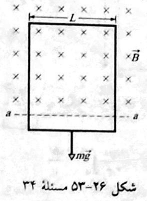
چون میدان برونسو و جهت جریان در میله رو به بالا است از قاعده دست راست دیده می‌شود که جهت $\vec{F}_B$ رو به سمت راست است. پس عامل، خارجی باید نیروی به بزرگی $۲/۸۷\times۱۰^{-۸}\ N$ و رو به سمت چپ وارد کند.

(ث) آهنگ کار عامل خارجی روی میله برابر است با

$$P = Fv = (۲/۸۷\times۱۰^{-۸})(۵) = ۱/۴۴\times۱۰^{-۷}\ W$$

که همان‌طور که انتظار داشتیم برابر پاسخ قسمت (ب) است. و این بیانگر پایستگی انرژی است. انرژی مکانیکی عامل خارجی به انرژی گرمایی تبدیل شده است.

●●۳۴- در شکل ۲۶-۵۳ یک حلقهٔ رسانای مستطیلی دراز، به پهنای L، مقاومت R و جرم m در میدان مغناطیسی افقی و یکنواخت $\vec{B}$ که به سمت داخل صفحهٔ کاغذ است و فقط در بالای خط aa' وجود دارد، آویزان است. سپس حلقه رها می‌شود؛ در حین سقوط حلقه شتاب می‌گیرد تا به تندی حد معین v_t می‌رسد. با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، رابطه‌ای برای v_t به دست آورید.



شکل ۲۶-۵۳ مسئلهٔ ۳۴

حل: نیرویی که باعث تغییر شار میدان مغناطیسی می‌شود نیروی وزن mg حلقه است. برای اینکه حلقه به تندی حد v_t برسد باید این نیرو با نیروی iLB که با تغییر شار مخالفت می‌کند برابر شود. لذا داریم

$$mg = iLB = \left|\frac{\varepsilon}{R}\right| LB = \frac{BLv_t}{R} LB = \frac{B^۲L^۲v_t}{R}$$

$$\Rightarrow v_t = \frac{mgR}{B^۲L^۲}$$

●●۳۵- میلهٔ رسانای نشان داده در شکل ۲۶-۵۰ دارای طول L است و در امتداد افقی با سرعت ثابت v_t، روی ریل‌های رسانای بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. ریل‌ها در یک انتها با نواری فلزی به هم متصل‌اند. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ ناحیه‌ای را که میله در آن حرکت می‌کند پرکرده است. فرض کنید که L=۱۰cm، v=۵/۰m/s و B=۱/۲T است. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین صفحه) emf القا شده در میله. مطلوب است (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در حلقهٔ رسانا. فرض کنید که مقاومت میله ۰/۴۰Ω و مقاومت ریل‌ها و نوار فلزی کم و قابل چشم‌پوشی است. (ث) آهنگ تولید انرژی گرمایی در مسئله چقدر است؟ (ج) نیروی خارجی لازم برای اینکه $\vec{v}$ ثابت باشد، چقدر است؟ (چ) با چه آهنگی این نیرو روی میله کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) از مسئله ۳۱ داریم

$$\varepsilon = BLv = (۱/۲)(۰/۱)(۵) = ۰/۶\,\text{V}$$

(ب) چون سطح و در نتیجه شار میدان مغناطیسی در حال افزایش است، جهت جریان و نیروی محرکه القایی می‌خواهد با این افزایش مخالفت کند در نتیجه میدان مغناطیسی خلاف میدان اصلی ایجاد می‌نماید. جهت میدان درون سو و جهت جریان و در نتیجه نیروی محرکه در میله رو به بالا است.

(پ) جریان القا شده در سیم برابر است

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۰/۶}{۰/۴} = ۱/۵\,\text{A}$$

(ت) همان‌طور که در حل قسمت ب گفته شد جهت جریان در میله رو به بالا و در حلقه ساعتگرد می‌باشد.

(ث) آهنگ تولید انرژی گرمایی برابر است با:

$$P_{th} = Ri^۲ = (۰/۴)(۱/۵)^۲ = ۰/۹\,\text{W}$$

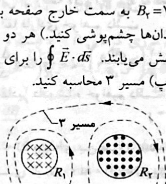
(ج) $F = iLB = (۱/۵)(۰/۱)(۱/۲) = ۰/۱۸$

طبق قاعده دست راست نیرو به سمت راست است پس برای آنکه میله با سرعت ثابت حرکت خود ادامه دهد باید نیروی خارجی به بزرگی ۰/۱۸N و به سمت چپ به میله وارد می‌شود.

(چ) $P = Fv = (۰/۱۸)(۵) = ۰/۹۰\,\text{W/s}$

بخش ۲۶-۶ میدان‌های الکتریکی القایی

●۳۶- شکل ۲۶-۵۴ دو ناحیهٔ دایره‌ای $R_۱$ و $R_۲$ را به شعاع‌های $r_۱$=۲۰/۰cm و $r_۲$=۳۰/۰cm نشان می‌دهد. در $R_۱$ میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B_۱$=۵۰/۰mT به سمت داخل صفحهٔ کاغذ و در $R_۲$ میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B_۲$=۷۵/۰mT به سمت خارج صفحه برقرار است (از کناره‌های این میدان‌ها چشم‌پوشی کنید.) هر دو میدان با آهنگ ۸/۵۰mT/s کاهش می‌یابند. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ را برای (الف) مسیر ۱، (ب) مسیر ۲ و (پ) مسیر ۳ محاسبه کنید.



شکل ۲۶-۵۴ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف)

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^۲\frac{dB}{dt}$$

برای مسیر ۱

$$\oint_۱ \vec{E}\cdot\vec{ds} = -(۳/۱۴)(۰/۲)^۲(-۸/۵\times۱۰^{-۳}) = ۱/۰۶\times۱۰^{-۳}\,\text{V}$$

(ب) برای مسیر ۲

$$\oint_۲ \vec{E}\cdot\vec{ds} = -(۳/۱۴)(۰/۳)^۲(-۸/۵\times۱۰^{-۳}) = ۲/۴\times۱۰^{-۳}\,\text{V}$$

(پ) برای مسیر ۳، به دلیل اینکه میدان مغناطیسی در $C_۱$ و $C_۲$ در خلاف جهت‌اند لذا داریم:

$$\oint_۳ \vec{E}\cdot\vec{ds} = ۲/۴\times۱۰^{-۳} - ۱/۰۶\times۱۰^{-۳} = ۱/۳\times۱۰^{-۳}\,\text{V}$$

●۳۷- ILW SSM سیملولهٔ درازی دارای قطر ۱۲/۰cm است. وقتی جریان i در سیم پیچ‌هایش برقراراست، میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی B=۳۰/۰mT داخل آن ایجاد می‌شود. کاهش جریان i باعث کاهش میدان با آهنگی برابر ۶/۵۰mT می‌شود. بزرگی میدان الکتریکی القایی را در (الف) ۲/۲۰cm و (ب) ۸/۲۰cm از محور سیملوله، حساب کنید.

حل: (الف) به ازای r = ۲/۲cm نقطه داخل سیملوله و از قانون القای فارادی داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E(۲\pi r) = -\pi r^۲\frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{۱}{۲}r\frac{dB}{dt} = \frac{۱}{۲}(۲/۲\times۱۰^{-۲})(۶/۵\times۱۰^{-۳})$$

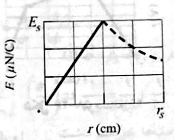
$$= ۷/۱۳\times۱۰^{-۵}\,\text{V/m}$$

(ب) برای r = ۸/۲cm نقطه خارج سیملوله است و داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E(۲\pi r) = -\pi R^۲\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{۱}{۲}\frac{R^۲}{r}\frac{dB}{dt}$$

$$E = \left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{(۰/۰۶)^۲}{(۰/۰۸۲)}(۶/۵\times۱۰^{-۳}) = ۱/۴۳\times۱۰^{-۷}\,\text{V/m}$$

●●۳۸- GO میدان مغناطیسی یکنواختی در جهت مثبت محور z از یک ناحیهٔ دایره‌ای در صفحهٔ xy می‌گذرد. بزرگی میدان مغناطیسی B (برحسب تسلا) با رابطهٔ $B=at$، که در آن a ثابت است با زمان t (برحسب ثانیه) افزایش می‌یابد. بزرگی میدان الکتریکی E که بر اثر این افزایش در میدان مغناطیسی برقرار می‌شود در شکل ۲۶-۵۵ برحسب فاصلهٔ شعاعی r داده شده است. مقیاس محور قائم با E_s = ۳۰۰μN/C و مقیاس محور افقی با r_s = ۴/۰۰cm مشخص شده است. a را پیدا کنید.



شکل ۲۶-۵۵ مسئلهٔ ۳۸

حل: بزرگی میدان الکتریکی القایی در داخل ناحیه داخلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = (۲\pi r) = \pi r^۲\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = \frac{۱}{۲}r\frac{dB}{dt} = \frac{۱}{۲}r\frac{d}{dt}(at)$$

$$E = \frac{۱}{۲}ar$$

با توجه به نمودار به ازای r = ۲cm داریم $E = ۳۰۰\times۱۰^{-۶}$ N/c در نتیجه خواهیم داشت:

$$۳۰۰\times۱۰^{-۶} = \left(\frac{۱}{۲}\right)a(۲\times۱۰^{-۲}) \Rightarrow a = ۰/۰۳\,\text{T/s}$$

●●۳۹- میدان مغناطیسی یک آهنربای استوانه‌ای که سطح قطب آن دارای قطر ۳/۳cm است می‌تواند به طور سینوسی بین ۲۹/۶T و ۳۰/۰T با بسامد ۱۵Hz تغییر کند. در فاصلهٔ شعاعی

۱/۶cm، دامنهٔ میدان الکتریکی القایی بر اثر این تغییر چقدر است؟

حل: میدان مغناطیسی B را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$B(t) = B_۰ + B_۱\sin(\omega t + \Phi_۰)$$

که در آن

$$B_۰ = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۳۰ + ۲۹/۶) = ۲۹/۸\text{T}$$

و

$$B_۱ = \frac{۱}{۲}(۳۰ - ۲۹/۶) = ۰/۲\text{T}$$

$$B = ۲۹/۸ + ۰/۲\sin(\omega t + \Phi_۰)$$

حال از رابطه میدان الکتریکی در داخل استفاده می‌کنیم

$$E = \frac{r}{۲}\frac{dB}{dt} = \frac{r}{۲}\frac{d}{dt}\left[۲۹/۸ + ۰/۲\sin(\omega t + \Phi_۰)\right]$$

$$= \left(\frac{r}{۲}\right)\left[۰/۲\,\omega\cos(\omega t + \Phi_۰)\right] = E_{\max}\cos(\omega t + \Phi_۰)$$

$$E_m = (۰/۱)r\omega = (۰/۱)(r)(۲\pi f) = (۰/۱)(۱/۶\times۱۰^{-۲})(۲\pi)(۱۵\,\text{Hz})$$

$$= ۰/۱۵\,\text{V/m}$$

بخش ۲۶-۷ القاگرها و القایش

●۴۰- القاییدگی در پیچه‌ای که به طور فشرده ۴۰۰ دور سیم پیچی دارد برابر ۸/۰mH است. وقتی جریان ۵/۰mA است، شار مغناطیسی عبوری از پیچه چقدر است؟

حل: از معادله ۲۶-۳۳، $N\Phi_B = Li$ لذا برای Φ_B داریم

$$\Phi_B = \frac{Li}{N} = \frac{(۸\times۱۰^{-۳})(۵\times۱۰^{-۳})}{۴۰۰} = ۱\times۱۰^{-۷}\,\text{Wb}$$

●۴۱- یک پیچهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۰/۰cm شامل ۳۰/۰ دور سیم است که به طور فشرده پیچیده شده‌اند. یک میدان مغناطیسی خارجی ۲/۶۰ mT بر پیچه عمود است. (الف) اگر جریانی در پیچه برقرار نباشد، شار مغناطیسی که دورها را پیوند می‌دهد چقدر است؟ (ب) وقتی جریان در یک جهت معین در پیچه ۳/۸۰A است، شار خالص در پیچه از بین می‌رود. القاییدگی در پیچه چقدر است؟

حل: (الف) $\Phi_۱$ شار عبوری از یک حلقه است. لذا داریم

$$\Phi_B = N\Phi_۱ = NBA = NB(\pi r^۲)$$

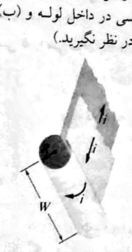
$$= (۳۰)(۲/۶\times۱۰^{-۳})(\pi)(۰/۱)^۲ = ۲/۴۵\times۱۰^{-۳}\,\text{Wb}$$

(ب) از معادله ۲۶-۳۳ داریم

$$L = \frac{N\Phi_۱}{i} = \frac{۲/۴۵\times۱۰^{-۳}}{۳/۸} = ۶/۴۵\times۱۰^{-۴}\,\text{H}$$

●●۴۲- شکل ۲۶-۵۶ یک نوار مسی به پهنای W=۱۶/۰ را نشان می‌دهد که به صورت لوله‌ای به شعاع R=۱/۸cm و با دو انتهای تخت خم شده است. جریان i=۳۵mA که به طور یکنواخت در پهنای نوار توزیع شده است از آن می‌گذرد و به این ترتیب عملاً یک سیملولهٔ تک دور تشکیل می‌شود. فرض کنید که میدان مغناطیسی در خارج این لوله قابل چشم‌پوشی و

میدان در داخل لوله یکنواخت است. مطلوب است (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در داخل لوله و (ب) القاییدگی لوله (دو انتهای تخت را در نظر نگیرید.)



شکل ۲۶-۵۶ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف) لوله را به عنوان یک سیملوله تک دور را می‌توان به صورت N حلقه دایره‌ای کوچک در پهنای نوار مسی در نظر گرفت. از هر حلقه جریان $\Delta i = i/N$ می‌گذرد. بنابراین میدان مغناطیسی در داخل این سیملوله برابر است با

$$B=\mu_0 n\Delta i=\mu_0\left(\frac{N}{W}\right)\left(\frac{i}{N}\right)=\mu_0\frac{i}{W}$$

$$=(4\pi\times10^{-7})\frac{0/035}{0/16}=2/7\times10^{-7}\ \mathrm{T}$$

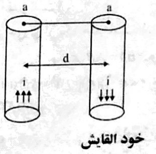
(ب) از معادله ۲۶-۳۳ برای سیملوله تک حلقه داریم

$$L=\frac{N\Phi_1}{i}=\frac{(\pi R^2)B}{i}=\frac{\pi R^2(\mu_0 i/w)}{i}=\frac{\mu_0\pi R^2}{w}$$

$$L=\frac{(4\pi\times10^{-7})(\pi)(0/018)^2}{0/16}=8\times10^{-9}\ \mathrm{H}$$

••۴۳- دو سیم دراز مشابه به شعاع $a=1/53\mathrm{mm}$ موازی‌اند و از آنها جریان‌ها یکسان و در جهت‌های مخالف می‌گذرند. فاصلهٔ محور آنها برابر $d=14/2\mathrm{cm}$ است. از شار داخل خود سیم‌ها صرف‌نظر کنید اما شار ناحیهٔ بین دو سیم را در نظر بگیرید. القاییدگی بر یکای طول سیم‌ها چقدر است؟

حل:



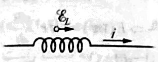
بخش ۲۶-۸ خود القایش

•۴۴- یک القاگر 12H حامل جریان 2/0A است. جریان باید با چه آهنگی تغییر کند تا یک emf برابر 60V در القاگر ایجاد شود.

حل:

$$\varepsilon=L\frac{di}{dt}\Rightarrow 60=(12)\left(\frac{di}{dt}\right)\Rightarrow\frac{di}{dt}=5\ \mathrm{A/s}$$

•۴۵- در لحظهٔ معینی جهت جریان و emf خود القایی در یک القاگر مطابق شکل ۲۶-۵۷ داده شده‌اند. (الف) آیا جریان افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ب) emf القایی برابر 17 V و آهنگ تغییر جریان 25kA/s است؛ القاییدگی را به دست آورید.



شکل ۲۶-۵۷ مسئلهٔ ۴۵

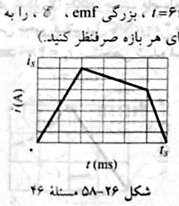
حل:

(الف) طبق قانون لنز، جریان باید کاهش یابد تا با افزایش شار (ناشی لذا افزایش جریان رو به سمت راست) مخالفت کند.

(ب)

$$\varepsilon=L\frac{di}{dt}\Rightarrow 17=L(2/5\times10^4)\Rightarrow L=6/8\times10^{-4}\ \mathrm{H}$$

••۴۶- جریان i در یک القاگر 4/6H مطابق شکل ۲۶-۵۸ نسبت به زمان t، تغییر می‌کند که در آن مقیاس محور قائم با $i_s=8/0\,A$ و مقیاس محور افقی با $t_s=6/0\,\mathrm{ms}$ مشخص شده است. القاگر دارای مقاومت 12Ω است. در طی بازه‌های زمانی (الف) $t=0$ تا $t=2ms$؛ (ب) $t=2\mathrm{ms}$ تا $t=5\mathrm{ms}$؛ و (پ) $t=5\mathrm{ms}$ تا $t=6\mathrm{ms}$، بزرگی emf، $\mathscr{E}$، را به دست آورید. (از رفتار در انتهای هر بازه صرفنظر کنید.)



شکل ۲۶-۵۸ مسئلهٔ ۴۶

حل: از معادله $|\varepsilon|=L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$ و با استفاده از نمودار خواهیم داشت:

(الف) به ازای $0<t<2\mathrm{ms}$ داریم

$$\varepsilon=L\frac{\Delta i}{\Delta t}=(4/6)\frac{(7-0)}{2\times10^{-3}}=1/6\times10^4\ \mathrm{V}$$

(ب) به ازای $2\mathrm{ms}<t<5\mathrm{ms}$ داریم

$$\varepsilon=L\frac{\Delta i}{\Delta t}=(4/6)\left|\frac{(5-7)}{(5-0/2)\times10^{-3}}\right|=3/1\times10^3\ \mathrm{V}$$

(پ)

$$\varepsilon=L\frac{\Delta i}{\Delta t}=(4/6)\left|\frac{(0-5)}{(6-5)\times10^{-3}}\right|=2/3\times10^4\ \mathrm{V}$$

••۴۷- *القاگرها به صورت متوالی.* دو القاگر L_1 و L_2 به صورت متوالی به هم متصل‌اند و در فاصلهٔ زیادی از هم قرار دارند به طوری که میدان مغناطیسی یکی بر دیگری اثر ندارد. (الف) نشان دهید القاییدگی معادل از این رابطه به دست می‌آید

$$L_{eq}=L_1+L_2$$

(*راهنمایی:* به هم بستن مقاومت‌ها و خازن‌ها به صورت متوالی را مرور کنید.) کدام یک مشابه مورد بالاست؟ (ب) رابطهٔ کلی قسمت (الف) برای N القاگر متوالی چیست؟

حل: (الف) جریان عبوری از این دو القاگر یکسان است.

$$\varepsilon_1=-L_1\frac{di}{dt}\quad,\quad\varepsilon_2=-L_2\frac{di}{dt}$$

در اتصال متوالی $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ لذا می‌توان نوشت

$$-L_{eq}\frac{di}{dt}=-L_1\frac{di}{dt}-L_2\frac{di}{dt}\Rightarrow L_{eq}=L_1+L_2$$

(ب) اگر N القاگر هم درست مثل مقاومت‌ها داریم

$$L_{eq}=\sum_{i=1}^{N}L_i$$

••۴۸- *القاگرها به صورت موازی.* دو القاگر L_1 و L_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند و در فاصلهٔ زیادی از هم قرار دارند به طوری که میدان مغناطیس یکی بر دیگری اثر ندارد. (الف) نشان دهید القاییدگی معادل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$$

(*راهنمایی:* به هم بستن مقاومت‌ها و خازن‌ها به صورت موازی را مرور کنید.) کدامیک مشابه مورد بالاست؟ (ب) رابطهٔ کلی قسمت (الف) برای N القاگر موازی چیست؟

حل: (الف)

$$i=i_1+i_2\Rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}$$

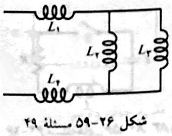
در این حالت داریم $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$ لذا

$$-\left(\frac{\varepsilon}{L_{eq}}\right)=-\left(\frac{\varepsilon_1}{L_1}\right)-\left(\frac{\varepsilon_2}{L_2}\right)\Rightarrow\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$$

(ب) مانند مقاومت‌ها خواهیم داشت

$$\frac{1}{L_{eq}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L_i}$$

••۴۹- آرایشی از القاگرهای شکل ۲۶-۵۹ با $L_1=30/0\mathrm{mH}$، $L_2=50/0\mathrm{mH}$، $L_3=20/0\mathrm{mH}$ و $L_4=15/0\mathrm{mH}$، به یک منبع جریان متغیر متصل‌اند. القاییدگی معادل این آرایش چقدر است؟ (به مسئله‌های ۴۷ و ۴۸ نگاه کنید.)



شکل ۲۶-۵۹ مسئلهٔ ۴۹

حل: L_2 و L_3 موازی هستند

$$\frac{1}{L_{23}}=\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}\Rightarrow L_{23}=\frac{L_2L_3}{L_2+L_3}=\frac{(50)(20)}{(50+20)}=14/3\mathrm{mH}$$

L_1، L_{23} و L_4 متوازی هستند لذا خواهیم داشت

$$L_{eq}=L_1+L_{23}+L_4$$
$$=30+14/3+15=59/3\mathrm{mH}$$

بخش ۲۶-۹ مدارهای RL

•۵۰- جریانی در یک مدار RL در مدت 5/00s به یک سوم مقدار حالت پایایش می‌رسد. ثابت زمانی القایی را به دست آورید.

حل: مقدار پایا همان مقدار بیشینه $i_m=\varepsilon/R$ است لذا داریم

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/\tau_L}\right)\Rightarrow\frac{1}{3}i_m=i_m(1-e^{-5/\tau_L})$$

$$e^{-5/\tau_L}=\frac{2}{3}\Rightarrow-\frac{5}{\tau_L}=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\tau_L=12/2\mathrm{s}$$

•۵۱- ILW پس از خارج کردن باتری از مدار RL، جریان مدار در اولین ثانیه از 1/0A به 10mA کاهش می‌یابد. اگر L برابر 10H باشد، مقاومت در مدار را به دست آورید.

حل: جریان در مدار با رابطه $i=i_0e^{-t/\tau_L}$ داده می‌شود که i_0 جریان در $t=0$ است. این معادله را برای τ_L حل می‌کنیم تا سپس با کمک رابطه $\tau_L=L/R$ مقدار R را به دست آوریم.

$$\ln\frac{i}{i_0}=-\frac{t}{\tau_L}\Rightarrow\ln(0/01)=-\frac{1}{\tau_L}\Rightarrow\tau_L=0/217\mathrm{s}$$

اکنون می‌توان مقاومت R را به دست آورد

$$\tau_L=\frac{L}{R}\Rightarrow 0/217=\frac{10}{R}\Rightarrow R=46\Omega$$

•۵۲- کلید شکل ۲۶-۱۵ در زمان $t=0$ روی a بسته می‌شود. نسبت emf خود القای القاگر به emf باتری، $\mathscr{E}_L/\mathscr{E}$، (الف) درست پس از $t=0$ و (ب) در $t=2/00\tau_L$ چقدر است؟ (پ) در چه مضربی از τ_L مقدار $\mathscr{E}_L/\mathscr{E}=0/500$ است؟

حل: (الف) درست پس از بسته شدن کلید $\varepsilon-\varepsilon_L=iR$ است. ولی دراین لحظه $t=0$ است لذا $\varepsilon_L=\varepsilon$ و یا $\varepsilon_L/\varepsilon=1$ است.

(ب)

$$\varepsilon_L(t)=\varepsilon e^{-t/\tau_L}=\varepsilon e^{-2\tau/\tau_L}=\varepsilon e^{-2}=0/135\varepsilon$$

در نتیجه $\varepsilon_L/\varepsilon=0/135$

(پ) با توجه به رابطه $\varepsilon_L(t)=\varepsilon e^{-t/\tau_L}$ می‌توان نتیجه زیر را نوشت

$$\frac{t}{\tau_L}=\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_L}\right)\Rightarrow t=\tau_L\ln(2)=0/693\tau_L$$

•۵۳- سیملوله‌ای با القاییدگی 6/30μH به طور متوالی به مقاومت 1/20kΩ بسته شده است. (الف) اگر یک باتری 14/0V به دو سر این دو متصل شود، چه مدت طول می‌کشد تا جریان در مقاومت به ٪80/0 مقدار نهایی‌اش برسد؟ (ب) در زمان $t=70\tau_L$، جریان در مقاومت چقدر است؟

حل: (الف)

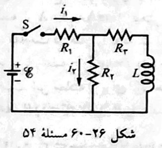
$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t/\tau_L})\Rightarrow 0/8\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}})$$

$$\ln(۰/۲) = -\frac{R}{L}t = \frac{(۱/۲\times۱۰^{۳})}{(۶/۳\times۱۰^{-۶})}t \Rightarrow t = ۸/۴۵\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{s}$$

(ب) در $t=\tau_L$ جریان در مدار برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-۱}) = \frac{(۱۴)}{(۱/۲\times۱۰^{۳})}(۱-e^{-۱}) = ۷/۳۷\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{A}$$

•۵۴- در شکل ۲۶-۶۰، $\mathscr{E}=۱۰۰\mathrm{V}$ ، $R_۱=۱۰/۰\Omega$ ، $R_۲=۲۰/۰\Omega$، $R_۳=۳۰/۰\Omega$ و $L=۲/۰۰\mathrm{H}$ است. مقدارهای (الف) $i_۱$ و (ب) $i_۲$ بلافاصله پس از بستن کلید S. (جریان‌ها را در جهتی که نشان داده شده‌اند دارای مقدارهای مثبت و جریان‌ها در جهت مخالف را منفی در نظر بگیرید.) (پ) $i_۱$ و (ت) $i_۲$ مدتی پس از بستن کلید S و (ث) $i_۱$ و (ج) $i_۲$ بلافاصله پس از بازکردن کلید S. (چ) $i_۱$ و (ح) $i_۲$ مدتی پس از باز کردن کلید S چقدرند؟

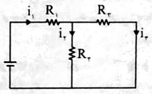


شکل ۲۶-۶۰ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف) و (ب) درست پس از بستن کلید القاگر به صورت مدار باز عمل می‌کند و در نتیجه مقاومت $R_۳$ و القاگر از مدار خارج هستند یعنی $i_۳=۰$ و داریم

$$i_۱ = i_۲ = \frac{\varepsilon}{R_۱+R_۲} = \frac{۱۰۰}{(۱۰+۲۰)} = ۳/۳۳\ \mathrm{A}$$

(پ) مدت طولانی پس از بستن کلید جریان به حالت پایا می‌رسد و القاگر به صورت مدار کوتاه عمل می‌کند و در این موقع مدار به شکل زیر در می‌آید



ابتدا مقاومت معادل را حساب می‌کنیم

$$R_{eq} = R_۱ + R_{۲۳} = R_۱ + \frac{R_۲R_۳}{R_۲+R_۳} =$$
$$= ۱۰ + \frac{(۲۰)(۳۰)}{(۲۰+۳۰)} = ۲۲\Omega$$

اکنون می‌توان $i_۱$ را به دست آورد.

$$i_۱ = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۱۰۰}{۲۲} = ۴/۵۵\ \mathrm{A}$$
$$i_۱ = i_۲ - i_۳ \Rightarrow i_۳ = i_۱ - i_۲$$

از طرفی داریم $i_۲R_۲ = i_۳R_۳$ که با قرار دادن $i_۳$ از معادله بالا داریم:

$$i_۲R_۲ = (i_۱ - i_۲)R_۳ \Rightarrow i_۲ = \frac{R_۳}{R_۲+R_۳}i_۱$$

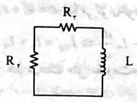
$$i_۲ = \frac{(۳۰)}{(۲۰+۳۰)}(۴/۵۵) = ۲/۷۳\ \mathrm{A}$$

که در نتیجه داریم:

$$i_۳ = i_۱ - i_۲ = ۴/۵۵ - ۲/۷۳ = ۱/۸۱\mathrm{A}$$

(ث) درست پس از باز کردن کلید، $i_۱=۰$ و سمت چپ از مدار خارج می‌شود.

(ج) با حذف سمت چپ، مدار به صورت زیر درمی‌آید



به دلیل حضور القاگر، جریان در $R_۳$ با سرعت کمتری تغییر می‌کند و بلافاصله پس از باز شدن کلید جریان همان جریان عبوری اولیه یعنی $i_۳=۱/۸۲\mathrm{A}$ است. جریان در $R_۲$ دارای همین بزرگی ولی در جهت مخالف است یعنی $i_۲=-۱/۸۲\mathrm{A}$.

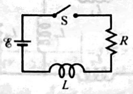
(چ) و (ح) پس از مدتی طولانی از باز شدن مجدد کلید، دیگر هیچ منبع emf در مدار وجود نداشته و سرانجام تمام جریان‌ها به سمت صفر میل می‌کنند یعنی $i_۳=i_۲=۰$.

•۵۵- یک باتری در زمان $t=۰$ به یک مدار RL متوالی متصل می‌شود. در چند ثابت زمانی τ_L جریان به ۰/۱۰۰٪ کمتر از مقدار تعادلش می‌رسد؟

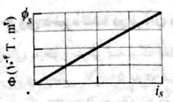
حل: در لحظه بسته شدن کلید یعنی $t=۰$، جریان از مقدار صفر طبق رابطه زیر شروع به افزایش می‌کند

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-t/\tau_L}\right)$$
$$۰/۹۹۹\frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-t/\tau_L}\right) \Rightarrow ۰/۹۹۹ = ۱-e^{-t/\tau}$$
$$e^{-t/\tau_L} = ۰/۰۰۱ \Rightarrow -\frac{t}{\tau_L} = \ln(۰/۰۰۱) = -۶/۹۱$$
$$\Rightarrow t = ۶/۹۱\,\tau_L$$

•۵۶- در شکل ۲۶-۶۱، القاگر دارای ۲۵ دور و emf باتری آرمانی برابر ۱۶V است. شکل ۳۰-۶۲ شار مغناطیسی Φ که از هر دور می‌گذرد را برحسب جریان i که از القاگر می‌گذرد نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\phi_s = ۴/۰\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{T.m^۲}$ و مقیاس محور افقی با $i_s=۲/۰۰\mathrm{A}$ مشخص شده است. اگر کلید S در زمان $t=۰$ بسته شود، در $t=۱/۵\tau_L$ آهنگ تغییر جریان، di/dt چقدر است؟



شکل ۲۶-۶۲ مسئله‌های ۵۶، ۸۰، ۸۳ و ۹۳



شکل ۲۶-۶۲ مسئلهٔ ۵۶

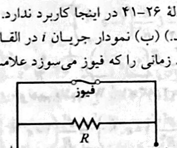
حل: از روی نمودار داریم $\Phi_{B/i} = ۲\times۱۰^{-۴}$، بنابراین به ازای $N=۲۵$، داریم:

$$N\Phi_B = Li \Rightarrow L = N\frac{B}{i} = (۲۵)(۲\times۱۰^{-۴}) = ۵\times۱۰^{-۳}\ H$$

برای به دست آوردن di/dt چنین خواهیم داشت:

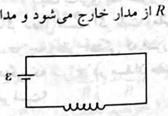
$$i = \frac{\varepsilon}{R}(۱-e^{-t/\tau_L})$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon R}{RL}e^{-t/\tau_L} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-t/\tau_L} = \frac{۱۶}{(۵\times۱۰^{-۳})}(e^{-۱/۵})$$
$$= ۷۱۴\ \mathrm{A/s}$$

••۵۷- در شکل ۲۶-۶۳، $R=۱۵\ \Omega$، $L=۵/۰\ \mathrm{H}$، باتری آرمانی با $\mathscr{E}=۱۰\ \mathrm{V}$ و فیوز آرمانی $۳/۰\ \mathrm{A}$ در شاخه بالایی وجود دارند. فیوز تا وقتی که جریان در آن کمتر از $۳/۰\ \mathrm{A}$ باشد مقاومتش صفر است. اگر جریان به $۳/۰\ \mathrm{A}$ برسد فیوز «می‌سوزد» و پس از آن مقاومتش بینهایت است. کلید S در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. (الف) در چه زمانی فیوز می‌سوزد؟ (*راهنمایی*: معادلهٔ ۲۶-۴۱ در اینجا کاربرد ندارد. معادلهٔ ۲۶-۳۹ را بازنگری کنید.) (ب) نمودار جریان i در القاگر را برحسب زمان رسم کنید. زمانی را که فیوز می‌سوزد علامت بگذارید.



شکل ۲۶-۶۳ مسئله ۵۷

حل: (الف) پیش از آنکه جریان فیوز به ۳A رسیده و بسوزد، مقاومت فیوز صفر و بنابراین اتصال کوتاه می‌شود. به این ترتیب مقاومت R از مدار خارج می‌شود و مدار به صورت زیر است



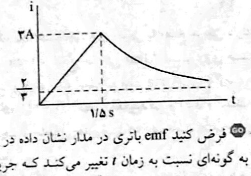
حال با استفاده از قضیه حلقه داریم:

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{L}t$$

که زمان سوختن فیوز به دست می‌آید:

$$t = \frac{iL}{\varepsilon} = \frac{(۳)(۵)}{۱۰} = ۱/۵s$$

(ب) از روابط فوق می‌بینیم که تا $t=۱/۵s$ رابطه بین جریان در $t_۰=۱/۵s$ برابر با ۳A و با توجه به رابطه جریان برای مدار RL در $t=\infty$، $i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{۲}{۳}$ است لذا نمودار i را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.

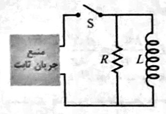


•••۵۸- فرض کنید emf باتری در مدار نشان داده در شکل ۲۶-۲۱ به گونه‌ای نسبت به زمان t تغییر می‌کند که جریان از رابطهٔ $i(t)=۳/۰+۵/۰t$ به دست می‌آید که در آن i برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. فرض کنید $R=۴/۰\Omega$ و $L=۶/۰\mathrm{H}$، رابطه‌ای برای emf باتری به صورت تابعی از زمان به دست آورید. (*راهنمایی*: قاعدهٔ حلقه را به کار برید.)

حل: از قضیه حلقه برای مدار RL داریم

$$\varepsilon = -Ri - L\frac{di}{dt} = ۰ \Rightarrow \varepsilon = L\frac{di}{dt} + Ri$$
$$\varepsilon = L(۵) + R(۳+۵t) = (۶)(۵) + (۴)(۳+۵t)$$
$$\varepsilon = ۴۲ + ۲۰t$$

•••۵۹- SSM WWW در شکل ۲۶-۶۴ پس از بستن کلید در زمان t، emf منبع به طور خودکار تنظیم می‌شود تا جریان ثابت i برقرار بماند. (الف) جریانی که از القاگر می‌گذرد را برحسب تابعی از زمان به دست آورید. (ب) در چه زمانی جریان در مقاومت با جریان در القاگر مساوی می‌شود؟



شکل ۲۶-۶۴ مسئلهٔ ۵۹

حل: (الف) اختلاف پتانسیل دو سر سیم‌پیچ و مقاومت با یکدیگر برابر است.

$$Ri_۱ = L\frac{di_۲}{dt}$$

از قاعده اشعاب داریم $i=i_۱+i_۲$ لذا $\frac{di_۲}{dt} = -\frac{di_۱}{dt}$ در نتیجه خواهیم داشت. (i جریان منبع ثابت است)

$$Ri_۱ + L\frac{di_۱}{dt} = ۰ \Rightarrow i = i_۰e^{-R\frac{t}{L}}$$

که در آن $i_۰$ جریان عبوری از مقاومت در $t=۰$ است. در این لحظه القاگر مانع عبور جریان شده و اتصال باز است. بنابراین در این لحظه $i_۲=۰$ و $i_۱=i=i_۰$ است و در نتیجه داریم

$i_۱ = i_e^{-R\frac{t}{L}} \quad , \quad i_۲ = (i - i_۱) = i(۱ - e^{-R\frac{t}{R}})$

(ب) هرگاه $i_۱ = i_۲$ باشد از معادلات بالا داریم

$$e^{-R\frac{t}{L}} = ۱ - e^{-R\frac{t}{L}} \Rightarrow e^{-R\frac{t}{L}} = \frac{۱}{۲}$$

از طرفین لگاریتم بگیریم داریم

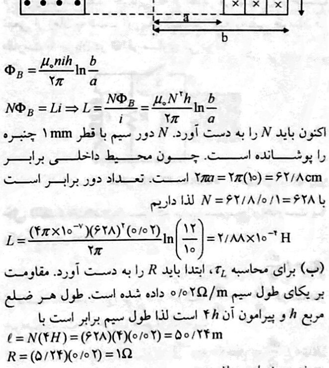
$$-\frac{Rt}{L} = \ln\left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow t = \frac{L}{R}\ln ۲$$

•••۶۰- یک هستهٔ چنبره‌ای چوبی با مقطع مربعی دارای شعاع داخلی ۱۰cm و شعاع خارجی ۱۲cm است. روی هسته یک لایه سیم پیچیده شده است (با قطر ۱/۰mm و مقاومت هر متر برابر ۰/۰۲Ω/m). (الف) القاییدگی و (ب) و ثابت زمانی القایی چنبرهٔ حاصل چقدر است؟ از ضخامت عایق روی سیم صرف‌نظر کنید.

حل: (الف) اگر هر ضلع مقطع چنبره یا ارتفاع را با h و a شعاع داخلی و b شعاع خارجی باشد $h = b - a = ۰/۱۲ - ۰/۱ = ۰/۰۲\text{m}$ می‌شود. با محاسبه Φ_B می‌توان L را به دست آورد.

$$\Phi_B = \int B.dA = \int_a^b \left(\frac{\mu_\circ Ni}{۲\pi r}\right)(hdr)$$

عنصر سطح یک نوار به پهنای dr و ارتفاع h در نظر گرفته شده است مطابق شکل



$$\Phi_B = \frac{\mu_\circ nih}{۲\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$N\Phi_B = Li \Rightarrow L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_\circ N^۲ h}{۲\pi}\ln\frac{b}{a}$$

اکنون باید N را به دست آورد. N دور سیم با قطر ۱mm چنبره را پوشانده است. چون محیط داخلی برابر $۲\pi a = ۲\pi(۱۰) = ۶۲/۸\text{cm}$ است. تعداد دور برابر است با $N = ۶۲/۸/۰/۱ = ۶۲۸$ لذا داریم

$$L = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۶۲۸)^۲(۰/۰۲)}{۲\pi}\ln\left(\frac{۱۲}{۱۰}\right) = ۲/۸۸\times۱۰^{-۴}\ \text{H}$$

(ب) برای محاسبه τ_L، ابتدا باید R را به دست آورد. مقاومت بر یکای طول سیم ۰/۰۲Ω/m داده شده است. طول هر ضلع مربع h و پیرامون آن $۴h$ است لذا طول سیم برابر است با

$\ell = N(۴H) = (۶۲۸)(۴)(۰/۰۲) = ۵۰/۲۴\text{m}$

$R = (۵/۲۴)(۰/۰۲) = ۱\Omega$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tau_l = \frac{L}{R} = \frac{۲/۸۸\times۱۰^{-۴}}{۱} = ۲/۸۸\times۱۰^{-۴}\text{s}$$

بخش ۲۶-۱۰ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

•۶۱- SSM پیچه‌ای به طور متوالی به یک مقاومت ۱۰/۰Ω متصل است. یک باتری آرمانی ۵۰/۰V به دو سر این وسیله اعمال می‌شود و پس از ۵/۰۰ms جریان به مقدار ۲/۰۰mA می‌رسد. (الف) القاییدگی پیچه را به دست آورید. (ب) در همین مدت چقدر انرژی در پیچه ذخیره می‌شود؟

حل: (الف)

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۳} = \frac{۵۰}{۱۰\times۱۰^۳}\left(۱ - e^{\frac{۵\times۱۰^{-۳}}{\tau_L}}\right)$$

$\Rightarrow \tau_L = ۹/۷۹\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$

$$\tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow ۹/۷۹\times۱۰^{-۳} = \frac{L}{۱۰\times۱۰^۳} \Rightarrow L = ۹۷/۹\text{H}$$

(ب)

$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}(۹۷/۹)(۲\times۱۰^{-۳})^۲ = ۱/۹۶\times۱۰^{-۴}\ \text{J}$$

•۶۲- پیچه‌ای با القاییدگی ۲/۰H و مقاومت ۱۰Ω ناگهان به یک باتری آرمانی با $\mathscr{E}$=۱۰۰V، وصل می‌شود. در ۰/۱۰s پس از آنکه اتصال برقرار شد، با چه آهنگی (الف) انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود، (ب) انرژی گرمایی در مقاومت ظاهر می‌شود، و (پ) انرژی به وسیلهٔ باتری تأمین می‌شود.

حل: داریم: $\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{۲}{۱۰} = ۰/۱s$ و $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$.

$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$$

$$\frac{dU_B}{dt} = \frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\cdot\frac{R}{L}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{\varepsilon^۲}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

به ازای $t = ۰/۱s$ خواهیم داشت $dU_B/dt = ۲/۸۳\times۱۰^۲\ \text{W}$.

(ب)

$$P_{th} = Ri^۲ = R\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲ = \frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$$

که به ازای $t = ۰/۱s$ خواهیم داشت $P_{th} = ۱/۵۴\times۱۰^۲\ \text{W}$.

(پ) از پایستگی انرژی داریم

$$P_{\text{باتری}} = P_{th} + \frac{dU_B}{dt} = ۳/۹۳\times۱۰^۲\text{W}$$

می‌توانستیم از معادله $P = \varepsilon i$ استفاده کنیم.

•۶۳- ILW در $t=۰$ ، یک باتری به طور متوالی به یک مقاومت و یک القاگر متصل است. اگر ثابت زمانی القایی برابر با ۳۷/۰ms باشد، در چه زمانی آهنگی که انرژی در مقاومت تلف می‌شود با آهنگی که انرژی در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود برابر است؟

حل: داریم $U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲$ و $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$ در نتیجه برای آهنگ ذخیره انرژی در القاگر خواهیم داشت

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} = L\frac{\varepsilon}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\left(\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{\varepsilon^۲}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

آهنگ تولید انرژی گرمایی در مقاومت چنین است:

$$P_{th} = Ri^۲ = R\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^۲ = \frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^۲$$

حال می‌توان این را با $dU_{B/dt}$ برابر قرار داده و آن را برای t حل کرد:

$$\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲ = \frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow t = \tau_L \ln_۲ = (۳\times۱۰^{-۳})\ln_۲ = ۲۵/۶۵\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

•۶۴- در $t=۰$ ، یک باتری به طور متوالی به یک مقاومت و یک القاگر متصل است. در چه مضربی از ثابت زمانی القایی، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر ۰/۵۰۰ برابر مقدار حالت پایای آن است؟

حل: $U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ \quad , \quad i = \frac{\varepsilon}{R}(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}})$

$$U_B = \frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}})^۲$$

در حالت تعادل یعنی $t \to \infty$، $U_\circ = \frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}$، در اینجا به دنبال زمانی هستیم که انرژی نصف این مقدار باشد یعنی

$$U = \frac{۱}{۲}U_\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}\right)^۲$$

$$۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۰/۷۰۷ e^{-\frac{t}{\tau_L}} = ۰/۲۹۳ \Rightarrow$$

$t = -\tau_L \ln(۰/۲۹۳) \Rightarrow \quad t = ۱/۲۳\,\tau_L$

••۶۵- GO برای مدار شکل ۲۶-۱۶، فرض کنید که $\mathscr{E}$=۱۰/۰V ، R=۶/۷۰Ω و L=۵/۵۰H است. یک باتری آرمانی در زمان $t=۰$ به مدار وصل می‌شود. (الف) در طی ۲/۰s اول چقدر انرژی به وسیلهٔ باتری تأمین می‌شود؟ (ب) چه مقدار از این انرژی در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود؟ (پ) چه مقدار از این انرژی در مقاومت تلف می‌شود؟

حل: داریم: $P_{\text{باتری}} = \varepsilon i$ و $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$.

(الف)

$$P_{\text{باتری}} = \frac{dU_{\text{باتری}}}{dt} = \varepsilon i\frac{\varepsilon^۲}{R}(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}})$$

در نتیجه انرژی تأمین شده توسط باتری چنین می‌شود

$$U_{\text{باتری}} = \int_\circ^t \frac{\varepsilon^۲}{R}\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)dt = \frac{\varepsilon^۲}{R}\left[t + \frac{L}{R}(e^{-R\frac{t}{L}} - ۱)\right]$$

که به ازای $t = ۲s$ خواهیم داشت $U_{\text{باتری}}$=۱۸/۷J.

(ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}L\frac{\varepsilon^۲}{R^۲}(۱ - e^{-R\frac{t}{L}})^۲$$

که به ازای $t = ۲s$ خواهیم داشت $U_B = ۵/۱\text{J}$

(پ) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U_{th} = \int_\circ^t Ri^۲ dt$$

که با قرار دادن رابطه I و انتگرال‌گیری به جواب U_{th} = ۱۳/۶ می‌رسیم. این نتیجه را می‌توان از پایستگی انرژی نیز به دست آورد. اختلاف دو مقدار انرژی به دست آمده در بالا، انرژی تلف شده در مقاومت را به دست می‌دهد

$$U_{th} = ۱۸/۷ - ۵/۱ = ۱۳/۶\text{J}$$

بخش ۲۶-۱۱ چگالی انرژی میدان مغناطیسی

•۶۶- یک حلقهٔ دایره‌ای از سیم به شعاع ۵۰mm حامل جریان ۱۰۰A است. مطلوب است (الف) بزرگی شدت میدان و (ب) چگالی انرژی در مرکز حلقه.

حل: (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقه چنین است

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲R} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰A)}{۲(۵۰\times۱۰^{-۳})} = ۱/۲۶\times۱۰^{-۳}\ \text{T}$$

(ب) آنگاه انرژی ذخیره شده در یکای حجم همسایگی مرکز حلقه چنین است

$$u_B = \frac{B^۲}{۲\mu_\circ} = \frac{(۱/۲۶\times۱۰^{-۳})^۲}{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})} = ۰/۶۲۸\text{J/m}^۳$$

•۶۷- SSM سیملوله‌ای به طول ۸۵/۰cm دارای مساحت سطح مقطع ۱۷/۰cm² است. سیملوله تعداد ۹۵۰ دور سیم دارد که حامل جریان ۶/۶۰A است. (الف) چگالی انرژی میدان مغناطیسی داخل سیملوله را حساب کنید. (ب) انرژی کل ذخیره شده در میدان مغناطیسی داخل سیملوله را به دست آورید (از اثرهای انتهایی دو سیملوله صرف‌نظر کنید.)

حل: (الف) میدان مغناطیسی درون سیملوله برابر است با

$$B = \mu_\circ\frac{N}{\ell}i$$

$$u_B = \frac{B^۲}{۲\mu_\circ} = \frac{\mu_\circ^۲\frac{N^۲}{\ell^۲}i^۲}{۲\mu_\circ} = \frac{۱}{۲}\mu_\circ\frac{N^۲}{\ell^۲}i^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}(۴\pi\times۱۰^{-۷})\left(\frac{۹۵۰}{۰/۸۵}\right)^۲(۶/۶)^۲ = ۳۴/۲\text{J/m}^۳$$

(ب)

$$U_B = u_B V = u_B A\ell = (۳۴/۲)(۱۷\times۱۰^{-۴})(۰/۸۵) = ۴/۹۴\times۱۰^{-۲}\ \text{J}$$

•۶۸- یک القاگر چنبره‌ای با القاییدگی ۹۰/۰mH، حجم ۰/۰۲۰۰m³ را در بردارد. اگر چگالی انرژی میانگین در چنبره ۷۰/۰J/m³ باشد، جریان عبوری از القاگر چقدر است؟

حل: انرژی ذخیره شده در چنبره برابر است با $U_B = u_B V$، که u_B چگالی انرژی و V حجم است. از طرف دیگر داریم $U_B = (۱/۲)Li^۲$ لذا می‌توان نوشت

$$i=\sqrt{\frac{۲u_BV}{L}}=\sqrt{\frac{۲(۷۰)(۰/۰۲)}{(۹۰\times۱۰^{-۳})}}=۵/۵۸\,A$$

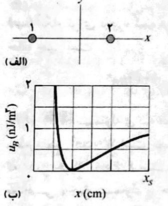
•۶۹- ILW بزرگی میدان الکتریکی یکنواختی که چگالی انرژی آن با چگالی انرژی مربوطه به میدان مغناطیسی ۰/۵۰T یکسان باشد، چقدر است؟

حل: $\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ E^۲=\frac{B^۲}{۲\mu_\circ}\Rightarrow E^۲=\frac{B^۲}{\varepsilon_\circ\mu_\circ}$

می‌دانیم که $c^۲=\frac{۱}{\varepsilon_\circ\mu_\circ}$ و c سرعت سیر نور در خلاء است.

$$E=cB=(۳\times۱۰^۸)(۰/۵)=۱/۵\times۱۰^۸\ V/m$$

••۷۰- GO شکل ۲۶-۶۵ الف مقطع دو سیم را نشان می‌دهد که مستقیم، موازی و خیلی درازند. نسبت $i_۱/i_۲$ جریانی که سیم ۱ حمل می‌کند به جریانی که سیم ۲ حمل می‌کند برابر $\frac{۱}{۳}$ است. سیم ۱ ثابت است ولی سیم ۲ می‌تواند در امتداد قسمت مثبت محور x حرکت کند تا اینکه چگالی انرژی مغناطیسی u_B برقرار شده توسط دو جریان در مبدأ را تغییر دهد. شکل ۲۶-۶۵ ب، u_B را برحسب تابعی از مکان x سیم ۲ نشان می‌دهد. وقتی $x\to\infty$، منحنی دارای مجانب $u_B=۱/۹۶\,nJ/m^۳$ است و مقیاس محور افقی با $x_s=۶۰/۰\,cm$ مشخص شده است. مقدار (الف) $i_۱$ و (ب) $i_۲$ چقدر است؟



شکل ۲۶-۶۵ مسئلهٔ ۷۰

حل: (الف) $i_۲=۳i_۱$ و از نمودار می‌توان دید که اگر $x=۲\,cm$ باشد چگالی انرژی در مبدأ و در نتیجه میدان مغناطیسی در مبدأ صفر است.

$$B_۱=\frac{\mu_\circ i_۱}{۲\pi r}\quad,\quad B_۲=\frac{\mu_\circ i_۲}{۲\pi x}$$

و این دو میدان اثر هم را خنثی کرده‌اند

$$\frac{\mu_\circ i_۱}{۲\pi r}=\frac{\mu_\circ i_۲}{۲\pi x}\Rightarrow\frac{i_۱}{r}=\frac{۳i_۱}{۰/۲}\Rightarrow r=۰/۰۶۷\,m$$

در حالتی که $x\to\infty$، اثر آن در مبدأ ناچیز است و چگالی انرژی فقط مربوط به سیم ۱ است.

$$U_{B,۱}=\frac{B_۱^۲}{۲\mu_\circ}=\frac{\mu_\circ^۲ i_۱^۲}{(۲\mu_\circ)(۴\pi^۲r^۲)}=\frac{\mu_\circ i_۱^۲}{۸\pi^۲r^۲}$$

$$\Rightarrow ۱/۹۶\times۱۰^{-۹}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i_۱^۲}{۸\pi^۲(۰/۰۶۷)^۲}\Rightarrow i_۱=۲/۳۵\times۱۰^{-۲}\,A$$

(ب)

$$i_۲=۳i_۱=۷/۰۵\times۱۰^{-۲}\,A$$

•۷۱- طولی از یک سیم مسی حامل جریان ۱۰A است که به طور یکنواخت روی سطح مقطعش توزیع شده است. مطلوب است چگالی انرژی (الف) میدان مغناطیسی و (ب) میدان الکتریکی در سطح سیم. قطر سیم ۲/۵mm و مقاومت یکای طول آن برابر ۳/۳Ω/km است.

حل: (الف) میدان مغناطیسی روی سطح سیم $B=\frac{\mu_\circ i}{۲R}$ است لذا خواهیم داشت

$$u_B=\frac{B^۲}{۲\mu_\circ}=\frac{۱}{۲\mu_\circ}\left(\frac{\mu_\circ i}{۲R}\right)^۲=\frac{\mu_\circ i^۲}{۸R^۲}$$
$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰)^۲}{۸(۲/۵\times۱۰^{-۳})^۲}=۱/۰۱\,J/m^۳$$

(ب)

$$u_B=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ E^۲=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ(\rho j)^۲$$

که در آن $j=i/A$ و $\rho=\frac{RA}{\rho}$ در نتیجه $\rho j=\frac{Ri}{\ell}$ لذا خواهیم داشت

$$u_B=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ\left(\frac{Ri}{\ell}\right)=\frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})\left[\frac{(۳/۳)(۱۰)}{(۱۰^۳)}\right]$$
$$=۴/۴۸\times۱۰^{-۱۵}\,J/m^۳$$

بخش ۲۶-۱۲ القایش متقابل

•۷۲- پیچهٔ ۱ دارای $L_۱=۲۵\,mH$ و $N_۱=۱۰۰$ دور است. پیچهٔ ۲ دارای $L_۲=۴۰\,mH$ و $N_۲=۲۰۰$ دور است. وضعیت دو پیچه نسبت به هم ثابت است؛ القاییدگی متقابل آنها ۳/۰mH است. جریان ۶/۰mA در پیچهٔ ۱ با آهنگ ۴/۰A/s تغییر می‌کند. (الف) شار مغناطیسی $\Phi_{۱۲}$ که به پیچهٔ ۱ پیوند می‌خورد چقدر است؟ و (ب) emf خود القایی که در آن پیچه ظاهر می‌شود چقدر است؟ (پ) شار مغناطیسی $\Phi_{۲۱}$ که به پیچهٔ ۲ پیوند می‌خورد چقدر است؟ و (ت) چه emf القا شدهٔ متقابلی در آن پیچه ظاهر می‌شود؟

حل: (الف) چون صورت مسئله جریان عبوری از پیچه دوم را نداده است، بنابراین شار $\Phi_{۱۲}$ که به پیچه اول پیوند خورده است را ناشی از خود القایی پیچه اول می‌گیریم در نتیجه داریم:

$$\Phi_{۱۲}=\Phi_۱=\frac{L_۱i_۱}{N_۱}=\frac{(۲۵\times۱۰^{-۳})(۶\times۱۰^{-۳})}{(۱۰۰)}=۱/۵\times۱۰^{-۶}\ Wb$$

(ب) $|\varepsilon_۱|=L_۱\frac{di_۱}{dt}=(۲۵\times۱۰^{-۳})(۴)=۰/۱\ V$

(پ) برای پیچه ۲ داریم:

$$\Phi_{۲۱}=\frac{Mi_۱}{N_۲}=\frac{(۳\times۱۰^{-۳})(۶\times۱۰^{-۳})}{(۲۰۰)}=۹۰\times۱۰^{-۹}\ Wb$$
$$=۹۰\,nWb$$

(ت) بزرگی emf ناشی از القای متقابل چنین است

$$\varepsilon_{۲۱}=M\frac{di_۱}{dt}=(۳\times۱۰^{-۳})(۴)=۱/۲\times۱۰^{-۲}\ V$$

•۷۳- SSM دو پیچه در مکان‌های معین قرار دارند. وقتی در پیچهٔ ۱ جریانی برقرار نیست و در پیچهٔ ۲ جریان با آهنگ ۱۵/۰A/s افزایش می‌یابد، نیروی محرکهٔ الکتریکی در پیچهٔ ۱ برابر ۲۵/۰mV است. (الف) القاییدگی متقابل آنها چقدر است؟ (ب) وقتی در پیچهٔ ۲ جریانی برقرار نیست و در پیچهٔ ۱ جریان ۳/۶۰A برقرار است، شار پیوند خورده در پیچهٔ ۲ چقدر است؟

حل: (الف) $\varepsilon_۱=\left|M\frac{di_۲}{dt}\right|\Rightarrow ۲۵\times۱۰^{۳}=M(۱۵)$

$$\Rightarrow M=۱/۶۷\times۱۰^{-۳}\ H$$

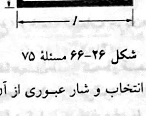
(ب) $N_۲\Phi_{۲۱}=Mi_۱=(۱/۶۷\times۱۰^{-۳})(۳/۶)=۶\times۱۰^{-۳}\ Wb$

•۷۴- دو سیملوله قسمتی از پیچهٔ جرقهٔ یک اتومبیل‌اند. وقتی در ۲/۵ms، جریان در یک سیملوله از ۶/۰A به صفر کاهش می‌یابد، یک emf برابر ۳۰kV در سیملولهٔ دیگر القا می‌شود. القاییدگی متقابل M سیملوله‌ها چقدر است؟

حل:

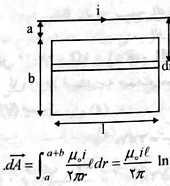
$$\varepsilon_۲=-M\frac{di_۱}{dt}\Rightarrow ۳۰\times۱۰^۳=-M\frac{۰-۶}{۲/۵\times۱۰^{-۳}}$$
$$\Rightarrow M=۱۲/۵\,H$$

••۷۵- حلقهٔ مستطیل شکلی با N دور سیم پیچ فشرده مطابق شکل ۲۶-۶۶ در کنار یک سیم مستقیم دراز قرار دارد. اگر $N=۱۰۰$، $a=۱/۰\,cm$، $b=۸/۰\,cm$ و $l=۳۰\,cm$ باشد، القاییدگی متقابل M برای ترکیب حلقه - سیم چقدر است؟



شکل ۲۶-۶۶ مسئلهٔ ۷۵

حل: یک نوار مستطیلی از حلقه را انتخاب و شار عبوری از آن را حساب می‌کنیم



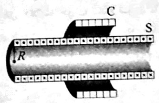
$$\Phi_B=\int\vec{B}_{سیم}.\overrightarrow{dA}=\int_a^{a+b}\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\ell dr=\frac{\mu_\circ i\ell}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

اکنون می‌توان M را از رابطه زیر به دست آورد.

$$M=\frac{N\Phi_B}{i}=\frac{N\mu_\circ\ell}{۲\pi}\ln\left(۱+\frac{b}{a}\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $M=۱/۳۱\times۱۰^{-۵}\ H$.

••۷۶- پیچهٔ C با N دور سیم، مطابق شکل ۲۶-۶۷، دور سیملولهٔ درازی به شعاع R و n دور سیم در یکای طول قرار داده شده است. (الف) نشان دهید که القاییدگی متقابل ترکیب پیچه - سیملوله با رابطهٔ $M=\mu_\circ\pi R^۲nN$ داده می‌شود. (ب) توضیح دهید که چرا M به شکل، اندازه یا امکان اینکه پیچه به طور فشرده سیم پیچی نشده باشد بستگی ندارد.



شکل ۲۶-۶۷ مسئلهٔ ۷۶

حل: (الف) شار سیملوله برای هر حلقه برابر است با

$$B_۱=\mu_\circ n_۱i_۱$$

$\Phi_{۲۱}$ شاری که در نتیجه میدان ۱ از پیچه ۲ می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi_{۲۱}=B_۱N_۲A_۱=\mu_\circ n_۱i_۱N_۲\pi R^۲=Mi_۱\Rightarrow M=\mu_\circ\pi R^۲nN$$

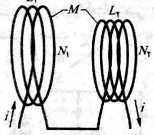
(ب) M به شکل و اندازه شعاع پیچه بستگی ندارد زیرا شار فقط از ناحیه درون سیملوله عبور می‌کند و بقیه مساحت پیچه تأثیری در آن ندارد.

••۷۷- SSM دو پیچه که مطابق شکل ۲۶-۶۸ به هم متصل‌اند، هر یک به طور جداگانه دارای القاییدگی $L_۱$ و $L_۲$ هستند. القاییدگی متقابل M است. (الف) نشان دهید این ترتیب می‌تواند با یک پیچهٔ تنها جایگزین شود که القاییدگی آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$L_{eq}=L_۱+L_۲+۲M$$

(ب) پیچه‌های شکل ۲۶-۷۲ را چگونه می‌توان دوباره به هم بست تا القاییدگی معادل از رابطهٔ زیر به دست آید

$$L_{eq}=L_۱+L_۲-۲M$$



شکل ۲۶-۶۸ مسئلهٔ ۷۷

(این مسئله، تعمیمی از مسئلهٔ ۴۷ است، اما شرط اینکه پیچه‌ها از هم دور باشند، حذف شده است.)

حل: (الف) از قاعده دست راست درمی‌یابیم که وقتی جریان افزایش می‌یابد میدان در هر دو پیچه نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه تغییر شار ناشی از این افزایش باعث emf هایی در یک جهت در هر حلقه می‌شود. بنابراین داریم:

$$\varepsilon_1 = -(L_1+M)\frac{di}{dt} \quad , \quad \varepsilon_2 = -(L_2+M)\frac{di}{dt}$$

لذا، emf کل حاصل از دو حلقه برابر است با:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -(L_1+L_2+2M)\frac{di}{dt}$$

که این می‌تواند emf ناشی از یک تک حلقه با القایدگی $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$ در نظر گرفته شود.

(ب) اگر پیچه‌ها در خلاف جهت بسته شوند با همان روش و با استفاده از قاعده دست راست خواهیم داشت:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

مسئله‌های اضافی

۷۸- در زمان $t=0$ یک اختلاف پتانسیل ۱۲/۰V به طور ناگهانی به دو سر پیچه‌ای با القایدگی ۲۳/۰mH و مقاومت R اعمال می‌شود. در زمان $t=0/150\,ms$ ، جریان در القاگر با آهنگ ۲۸۰A/s تغییر می‌کند. مقدار R را محاسبه کنید.

حل:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \qquad \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

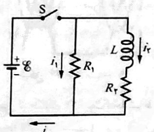
$$\Rightarrow 280 = \frac{12}{23\times10^{-3}}e^{-\frac{t}{\tau_L}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 0/537$$

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln(0/537) = -0/622$$

$$\Rightarrow \tau_L = \frac{0/15\times10^{-3}}{0/622} = 2/41\times10^{-4}\,s$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow R = \frac{L}{\tau_L} = \frac{23\times10^{-3}}{2/41\times10^{-4}} = 95/44\,\Omega$$

۷۹- SSM در شکل ۲۶-۶۹، یک باتری آرمانی، $\mathscr{E}=10V$ ، $R_1=50\Omega$ ، $R_2=10\Omega$ و $L=5/0H$ وجود دارد. کلید S در زمان $t=0$ بسته می‌شود. درست پس از بستن، مطلوب است محاسبهٔ (الف) i_1 ، (ب) i_2 ، (پ) جریان i_S در کلید، (ت) اختلاف پتانسیل V_2 دو سر مقاومت R_2 ، (ث) اختلاف پتانسیل V_L دو سر القاگر، و (ج) آهنگ تغییر di_2/dt . پس از زمانی طولانی، مطلوب است (چ) i_1 ، (ح) i_2 ، (خ) i_S ، (د) V_2، (ذ) L_L ، و (ر) di_2/dt.



شکل ۲۶-۶۹ مسئلهٔ ۷۹

حل: (الف) و (ب) درست پس از بستن کلید، جریانی از القاگر نمی‌گذرد و القاگر به صورت مدار باز عمل می‌کند. بنابراین $i_2=0$ و برای i_1 داریم

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{10}{5} = 2A$$

(پ) از قاعده انشعاب جریان‌ها داریم:

$$i_s = i_1 + i_2 = 2A$$

(ت)

$$V_2 = R_2 i_2 = 0$$

(ث) با توجه به اینکه $V_2 = 0$ داریم:

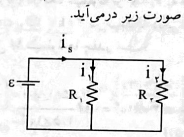
$$\varepsilon_L = \varepsilon = 10V$$

(ج)

$$\varepsilon_L = L\left|\frac{di_2}{dt}\right| \Rightarrow \left|\frac{di_2}{dt}\right| = \frac{\varepsilon_L}{L} = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{10}{5} = 2A/s$$

(چ) بعد از گذشتن زمان طولانی از بستن کلید، القاگر اتصال کوتاه می‌شود و آن را می‌توان با یک سیم جایگزین کرد. در این حالت مدار به صورت زیر درمی‌آید.



بنابراین داریم

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{10}{5} = 2A$$

(ح) همان‌طور که گفته شد $V_L = 0$ و بنابراین پتانسیل دو سر R_2 همان پتانسیل دو سر باتری می‌شود و داریم:

$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{\varepsilon}{R_2} = \frac{10}{10} = 1A$$

(خ) از قاعده انشعاب جریان‌ها داریم:

$$i_s = i_1 + i_2 = 2+1 = 3A$$

(د) همان‌طور که در قسمت (ح) گفته شد $V_L = 0$ و در نتیجه $V_2 = 10V$ می‌شود.

(ذ) همانطور که گفته $V_L = 0$

(ر)

$$V_L = L\frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 0$$

۸۰- در شکل ۲۶-۶۱ ، $R=4/0\,k\Omega$ ، $L=8/0\mu H$ و باتری آرمانی دارای $\mathscr{E}=20V$ است. چه مدت پس از بستن کلید، جریان ۲/۰mA است؟

حل:

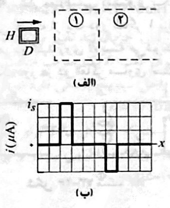
$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{8\times10^{-6}}{4\times10^{3}} = 2\times10^{-9}\,s$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \Rightarrow 2\times10^{-3} = \frac{20}{4\times10^{3}}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 0/6 \Rightarrow -\frac{t}{\tau_L} = \ln(0/6) = -0/51 \Rightarrow$$

$$t = (0/51)(2\times10^{-9}) = 1/02\times10^{-9}\,s = 1/02\,ns$$

۸۱- SSM شکل ۲۶-۷۰ الف یک حلقهٔ رسانای مستطیلی را با مقاومت $R = 0/020\,\Omega$، ارتفاع $H = 1/5\,cm$ و طول $D = 2/5\,cm$ نشان می‌دهد که با تندی ثابت $v = 40\,cm/s$ از میان دو ناحیهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت کشیده می‌شود. شکل ۲۶-۷۰ ب جریان i القایی در حلقه را برحسب تابعی از مکان x برای ضلع سمت راست حلقه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $i_s = 3/0\,\mu A$ مشخص شده است. برای مثال، وقتی حلقه وارد ناحیهٔ ۱ می‌شود یک جریان ۳/۰ μA القایی ساعتگرد در حلقه برقرار می‌شود. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (به سمت داخل یا خارج صفحه) میدان مغناطیسی در ناحیهٔ ۱. مطلوب است (پ) بزرگی و (ت) جهت میدان مغناطیسی در ناحیهٔ ۲.



شکل ۲۶-۷۰ مسئله ۸۱

حل: (الف) در زمان ورود حلقه به ناحیه (۱) جریان $i = 3\mu A$ و با توجه به معادله $\varepsilon = B\ell U$ داریم که در اینجا $\ell = H$ است

$$\varepsilon = BHV = iR \Rightarrow B = \frac{iR}{HV}$$

$$B = \frac{(3\times10^{-6})(0/02)}{(1/5\times10^{-2})(0/4)} = 1\times10^{-5}\,T$$

(ب) چون حلقه در حال ورود به میدان است لذا شار درحال افزایش است و جریان القایی طوری است که می‌خواهد مانع رفتن حلقه به درون میدان شود و میدانی ایجاد کند که اثر میدان B_1 را خنثی کند. جهت جریان القایی درون سو و بنابراین جهت میدان B_1 برونسو یعنی رو به سمت خارج صفحه است.

(پ) و (ت) در ناحیه (۲) جهت جریان القایی برعکس است، پس میدان القایی در این حالت خلاف حالت قبل و برون‌سو است، و چون حلقه از میدان (۱) وارد میدان (۲) شده است میدان (۲) ضعیف‌تر از میدان (۱) بوده است.

۸۲- میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ بر صفحهٔ یک حلقه سیم دایره‌ای به شعاع r عمود است. بزرگی میدان با رابطهٔ $B = B_0 e^{-t/\tau}$ نسبت به زمان تغییر می‌کند که در آن B_0 و τ ثابت‌اند. عبارتی را برای emf در حلقه به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

حل: از قانون القای فارادی داریم

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -\pi r^2\frac{dB}{dt} = -\pi r^2\frac{d}{dt}\left(B\cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

$$= \pi r^2\frac{B_0}{\tau_L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

۸۳- کلید S در شکل ۲۶-۶۱ در زمان $t=0$ بسته می‌شود، در آغاز جریانی از القاگر ۱۵/۰mH و مقاومت ۲۰/۰Ω می‌گذرد. در چه زمانی emf دو سرالقاگر با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت یکسان است؟

حل:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

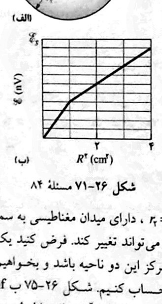
از طرف دیگر داریم:

$$Ri = L\frac{di}{dt} \Rightarrow R\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = L\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{R}{L}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = +\frac{L}{R}\ln(2) = \frac{15\times10^{-3}}{20}\ln(2) = 5/2\times10^{-4}\,s = 0/52\,ms$$

۸۴- شکل ۲۶-۷۱ الف دو ناحیهٔ دایره‌ای هم مرکز را نشان می‌دهد که میدان‌های مغناطیسی یکنواختی می‌توانند در آنها تغییر کنند. ناحیهٔ ۱، با شعاع $r_1=1/0\,cm$ دارای میدان مغناطیسی به سمت خارج $\vec{B}_1$ است که بزرگی آن افزایش می‌یابد. ناحیهٔ ۲ با



شکل ۲۶-۷۱ مسئلهٔ ۸۴

شعاع $r_2=2/0\,cm$ ، دارای میدان مغناطیسی به سمت خارج $\vec{B}_2$ است که آن نیز می‌تواند تغییر کند. فرض کنید یک حلقهٔ رسانا به شعاع R در مرکز این دو ناحیه باشد و بخواهیم emf ، ε ، را دور این حلقه حساب کنیم. شکل ۲۶-۷۵ ب emf ، ε، را به عنوان تابعی از مجذور شعاع R^2 حلقه تا لبهٔ بیرونی ناحیهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\varepsilon_s = 20/0\,nV$ مشخص

شده است. آهنگ (الف) $dB_۱/dt$ و (ب) $dB_۲/dt$ چقدر است؟ (پ) آیا بزرگی $\vec{B}_۲$ افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

حل: بزرگی emf القایی را می‌توان برای یک تک حلقه دور به شعاع R از رابطه زیر به دست آورد.

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi R^۲ \frac{dB}{dt}$$

حال با تقسیم این رابطه بر $R^۲$، آن را می‌توان به شیب منحنی شکل (ب) مربوط کرد.

(الف) برای ناحیه ۱، $r_۱^۲ = ۱\ cm^۲$ است و بنابراین باید از شیب قسمت اول منحنی استفاده کنیم. شیب قسمت اول منحنی برابر است با $\varepsilon/R^۲ = ۴۰\times۱۰^{-۶}\ V/m$ است و لذا داریم

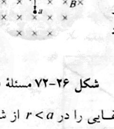
$$\frac{dB_۲}{dt} = (۸۰\times۱۰^{-۶})/\pi = ۲۵/۴۷\times۱۰^{-۶}\ T/s$$

(ب) برای ناحیه ۲، $r_۲^۲ = ۴cm^۲$ است و بنابراین باید از شیب قسمت دوم منحنی استفاده کنیم. شیب قسمت دوم منحنی برابر است با $\varepsilon/R^۲ = ۴۰\times۱۰^{-۶}\ V/m$ است و لذا داریم:

$$\frac{dB_۲}{dt} = (۴۰\times۱۰^{-۶})/\pi = ۱۲/۷۳\times۱۰^{-۶}\ T/s$$

(پ) با توجه به قانون لنز درمی‌یابیم که $B_۲$ در حال افزایش است.

۸۵- SSM شکل ۲۶-۷۲ میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ را که محدود به یک حجم استوانه‌ای به شعاع R است نشان می‌دهد. بزرگی $\vec{B}$ با آهنگ ثابت $۱۰mT/s$ کاهش می‌یابد. برحسب نماد بردار یکه، شتاب اولیهٔ الکترونی که در (الف) نقطهٔ a (فاصلهٔ شعاعی $r=۵/۰cm$) (ب) نقطهٔ b $(r=۰)$ و (پ) نقطهٔ c $(r=۵/۰cm)$ رها شود چقدر است؟



شکل ۲۶-۷۲ مسئلهٔ ۸۵

حل: (الف) میدان الکتریکی القایی را در $r < a$ از شکل انتگرالی قانون فارادی (بدون در نظر گرفتن علامت منفی آن) به دست می‌آوریم

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E = \frac{r}{۲}\frac{dB}{dt}$$

حال می‌توان شتاب الکترون رها شده را در نقطه a به دست می‌آوریم

$$\vec{a}_a = \frac{eE}{m}\hat{i} = \frac{er}{۲m}\left(\frac{dB}{dt}\right)\hat{i}$$

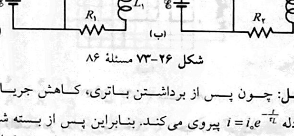
که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $\vec{a} = (۴/۴\times۱۰^۷\ m/s^۲)\hat{i}$.

(ب) دیدیم که $E \propto r$ ست و در نقطه b، $r=۰$ لذا $a_b = ۰$ است.

(پ) شتاب الکترون رها شده در نقطه C، همان شتاب در نقطه a ولی در جهت مخالف آن است

$$\vec{a}_c = -\vec{a}_a = -(۴/۴\times۱۰^۷\ m/s^۲)\hat{i}$$

۸۶- GO در شکل ۲۶-۷۳ الف کلید S به قدر کافی روی A بسته است به طوری که جریانی پایا در القاگری با القایدگی $L_۱=۵/۰۰mH$ و در مقاومت $R_۱=۲۵/۰\Omega$، برقرار شده است. همچنین، در شکل ۲۶-۷۳ ب کلید S به قدر کافی روی A بسته است به طوری که جریانی پایا در القاگری با القایدگی $L_۲=۳/۰۰mH$ و مقاومت $L_۲=۳۰/۰mH$ ، برقرار شده است. نسبت $\Phi_{۰۲}/\Phi_{۰۱}$ ، شار مغناطیسی گذشته از یک دور القاگر ۲ به شار مغناطیسی گذشته از یک دور القاگر ۱ برابر ۱/۵ است. در زمان $t=۰$ هر دو کلید روی B بسته می‌شوند. در چه زمان t شار گذشته از یک دور در دو القاگر مساوی است؟



شکل ۲۶-۷۳ مسئلهٔ ۸۶

حل: چون پس از برداشتن باتری، کاهش جریان از معادله $i = i_۰e^{-\frac{t}{\tau_L}}$ پیروی می‌کند. بنابراین پس از بسته شدن کلیدها روی B، شار در القاگرهای ۱ و ۲ با معادله زیر کاهش می‌یابند

$$\Phi_۱ = \Phi_{۱۰}e^{-\frac{t}{\tau_{L۱}}} \quad , \quad \Phi_۲ = \Phi_{۲۰}e^{-\frac{t}{\tau_{L۲}}}$$

که در آن $\tau_{L۱} = \frac{L_۱}{R_۱}$ و $\tau_{L۲} = \frac{L_۲}{R_۲}$ است این شارها را با هم برابر قرار داده و معادله را برای t حل کنیم چنین خواهیم داشت

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\Phi_{۲۰}}{\Phi_{۱۰}}\right)}{\frac{R_۲}{L_۲}+\frac{R_۱}{L_۱}} = \frac{\ln(۱/۵)}{\frac{۳}{۰/۰۰۳}+\frac{۲۵}{۰/۰۰۵}} = ۸/۱۱\times۱۰^{-۵}\ s$$

۸۷- صفحهٔ یک حلقهٔ سیمی مربعی به ضلع $۲۰cm$ و مقاومت $۲۰m\Omega$ بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B=۰/۲T$ عمود است. اگر دو ضلع مقابل حلقه از هم دور کنید دو ضلع دیگر به هم نزدیک می‌شوند و مساحت محصور در حلقه کاهش می‌یابد. اگر مساحت محصور شده در زمان $\Delta t=۰/۲۰s$ به صفر کاهش یابد، مطلوب است (الف) emf میانگین و (ب) میانگین جریان القایی در حلقه در مدت Δt.

حل: (الف) بزرگی میانگین emf القا شده برابر است با:

$$\varepsilon_{ave} = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \left|\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right| = \frac{B\Delta A}{\Delta t} = \frac{(۲)(۰/۲)^۲}{۰/۲} = ۰/۴V$$

(ب) میانگین جریان القایی برابر است با:

$$i_{ave} = \frac{\varepsilon_{ave}}{R} = \frac{۰/۴}{۲۰\times۱۰^۳} = ۲۰A$$

۸۸- پیچه‌ای با ۱۵۰ دور، وقتی جریان $۲/۰۰mA$ از آن می‌گذرد، دارای شار مغناطیسی $۵۰/۰nT.m^۲$ از هر دور است. (الف) القایدگی در پیچه چقدر است؟ مطلوب است محاسبهٔ (ب) القایدگی و (پ) شار عبوری از هر دور وقتی که جریان به $۴/۰۰mA$ افزایش یابد. (ت) وقتی جریان در پیچه با رابطهٔ $i=(۳/۰۰mA)\cos(۳۷۷t)$ داده شود، بیشینهٔ emf ، $\mathscr{E}$ ، دو سر پیچه چقدر است؟

حل: (الف)

$$N\Phi_B = Li \Rightarrow L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

$$L = \frac{(۱۵)(۵\times۱۰^{-۹})}{(۰/۰۰۲)} = ۳/۷۵\times۱۰^{-۳}\ H = ۳/۷۵mH$$

(ب) با تغییر شار، جریان تند تغییر می‌کند به طوری که L ثابت می‌ماند. می‌توان گفت L یک ضریب متناسب است. L در واقع به ساختمان داخل سیم‌پیچ بستگی دارد نه به مشخصات مدار. در نتیجه $L = ۳/۷۵mH$.

(پ) بدیهی است که اگر جریان دو برابر شود، میدان مغناطیسی و در نتیجه شار میدان مغناطیسی نیز دو برابر می‌شود. پس داریم $\Phi_{B_۲} = ۲(۵۰) = ۱۰۰\ nWb$.

(ت)

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt} = +(۳/۷۵\times۱۰^{-۳})(۳\times۱۰^{-۳})(۳۷۷)\sin(۳۷۷t)$$

$$\varepsilon_{max} = ۴/۲۴\times۱۰^{-۳}\ V$$

برای حالت بیشینه $\sin(۳۳۷t) = ۱$ منظور شده است.

۸۹- پیچه‌ای با القایدگی $۲/۰H$ و مقاومت ۱۰Ω به طور ناگهانی به یک باتری آرمانی با $\mathscr{E}=۱۰۰V$ متصل می‌شود. (الف) جریان تعادل چقدر است؟ (ب) وقتی این جریان در پیچه برقرار است، چقدر انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود؟

حل: (الف) جریان تعادل به ازای $t \to \infty$ به دست می‌آید، لذا داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰A$$

(ب) مقدار انرژی ذخیره شده برابر است با:

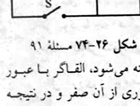
$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}(۲)(۱۰)^۲ = ۱۰۰\ J$$

۹۰- پس از برداشتن باتری از یک مدار RL (با $L=۲/۰۰\ H$ و $R=۳/۰۰\ \Omega$) چه مدت طول می‌کشد تا اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در مدار به ۱۰/۰٪ مقدار اولیه‌اش کاهش یابد؟

حل: برای کاهش جریان داریم $i = i_۰e^{-\frac{t}{\tau_L}}$ که در اینجا $i = \%۱۰i_۰$ است. معادله را برای t حل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\ln\left(\frac{i}{i_۰}\right) = -\frac{t}{\tau_L} = -\frac{L}{R}t \Rightarrow \ln(۰/۱) = -\frac{۲}{۳}t \Rightarrow t = ۱/۵۴s$$

۹۱- SSM در مدار شکل ۲۶-۷۴، $R_۱=۲۰k\Omega$، $R_۲=۲۰\ k\Omega$ ، $L=۵۰mH$ و باتری آرمانی $\mathscr{E}=۴۰V$ قرار دارند. کلید S که برای مدت طولانی باز بوده است در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. درست پس از بستن کلید، (الف) جریان i_{bat} در باتری و (ب) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ در $t=۳/۰\mu s$ (پ) جریان i_{bat} و (ت) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟ پس از مدتی طولانی، (ث) جریان i_{bat} و (ج) آهنگ di_{bat}/dt چقدر است؟



شکل ۲۶-۷۴ مسئلهٔ ۹۱

حل: (الف) وقتی کلید در $t=۰$ بسته می‌شود، القاگر با عبور جریان مخالفت می‌کند و جریان عبوری از آن صفر و در نتیجه جریان عبوری از باتری نیز صفر است.

(ب) برای جریان داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(۱-e^{-R\frac{t}{L}}\right) \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

در $t=۰$ داریم:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon_{bat}}{L} = \frac{۴۰}{۰/۰۵} = ۸\times۱۰^۲\ A/s$$

(پ) در اینجا ابتدا مقاومت معادل برای $R_۱$ و $R_۲$ را به دست می‌آوریم سپس یک RL خواهیم داشت که در متن کتاب مورد بحث قرار گرفته است.

$$R_{۱۲} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} = \frac{(۲۰)(۲۰)}{۲۰+۲۰} = ۱۰\ k\Omega$$

$$\tau_L = \frac{L}{R_{۱۲}} = \frac{۵\times۱۰^{-۳}}{۱۰\times۱۰^۳} = ۵\times۱۰^{-۶}\ s$$

$$i_{bat} = \frac{\varepsilon}{R_{۱۲}}\left(۱-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) = \frac{۴۰}{۱۰\times۱۰^۳}\left(۱-e^{-\frac{۳}{۵}}\right)$$

$$= ۱/۸\times۱۰^{-۳}\ A = ۱/۸mA$$

$$\frac{di_{bat}}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{۴۰}{۰/۰۵}e^{-\frac{۳}{۵}} = ۴۳۹\ A/s$$

(ث) در $t \to \infty$، القاگر اتصال کوتاه می‌شود و می‌توان آن را با یک سیم جایگزین کرد در این صورت یک مدار ساده R داریم با مقاومت معادل $R_{۱۲}$.

$$i_{bat} = \frac{\varepsilon}{R_{۱۲}} = \frac{۴۰}{۱۰^۴} = ۴\times۱۰^{-۳}\ A$$

(ج) در $t=۰$ داریم $\frac{di}{dt} = ۰$

۹۲- شار پیوند شده در یک پیچهٔ معین با مقاومت $۰/۷۵\Omega$ ، اگر جریان $۵/۵A$ از آن بگذرد، برابر $۲۶m\ Wb$ است. (الف) القایدگی پیچه را حساب کنید. (ب) اگر یک باتری آرمانی $۶/۰V$ به طور ناگهانی به دو سر پیچه متصل شود، چقدر طول می‌کشد تا جریان از ۰ تا $۲/۵A$ افزایش یابد؟

حل: (الف)

$$\Phi = Li \Rightarrow ۲۶\times۱۰^{-۳} = L(۵/۵) \Rightarrow L = ۴/۷۳\times۱۰^{-۳}\ H$$

(ب)

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{۴/۷۳\times ۱۰^{-۳}}{۰/۷۵} = ۶/۳\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{s}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۶}{۰/۷۵}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = ۰/۶۸۸ \quad \frac{t}{\tau_L} = \ln(۰/۶۸۸) = -۰/۳۷۴$$

$$t = \tau_L(۰/۳۷۴) = (۶/۳\times ۱۰^{-۳})(۰/۳۷۴) = ۲/۳۶\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{s}$$

۹۳- در شکل ۲۶-۶۱ یک باتری آرمانی ۱۲/۰ V با بستن کلید در زمان $t=۰$ به یک مقاومت ۲۰/۰ Ω و یک القاگر متصل می‌شود. با چه آهنگی در زمان $t=۱/۶۱\,\tau_L$ باتری انرژی را به میدان القاگر منتقل می‌کند؟

حل: انرژی ذخیره شده از $U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

که در آن $i = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}})$ و di/dt مشتق آن و $\tau_L = \frac{L}{R}$ است.
لذا خواهیم داشت:

$$\frac{dU_B}{dt} = L\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) = \frac{\varepsilon^۲}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{R}}\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$= \frac{(۱۲)^۲}{(۲۰)}(1-e^{-۱/۶۱})e^{-۱/۶۱} = ۱/۱۵\ \mathrm{W}$$

۹۴- یک سیملولهٔ استوانه‌ای دراز با ۱۰۰ دور بر سانتی‌متر دارای شعاع ۱/۶ cm است. فرض کنید که میدان مغناطیسی ایجاد شده در داخل سیملوله موازی محور آن و یکنواخت است. (الف) القایدگی به ازای یک متر از طول آن چقدر است؟ (ب) اگر جریان با آهنگ ۱۳ A/s تغییر کند، emf القا شده در هر متر چقدر است؟

حل:

$$B = \mu_۰ ni \quad , \quad \Phi_B = BA = \mu_۰ niA = \mu_۰ ni\pi r^۲$$

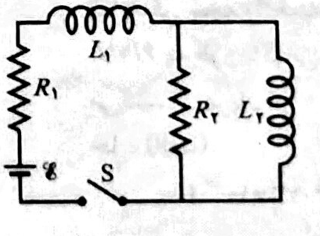
$$N\Phi_B = n\ell\Phi_B = Li \Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{n\Phi_B}{i}$$

$$\frac{L}{\ell} = \mu_۰\pi^۲\pi r^۲ = (۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۱۰۰)^۲\pi(۱/۶\times ۱۰^{-۲})$$

$$= ۰/۱\,H/m$$

(ب) $$\varepsilon = L\left|\frac{di}{dt}\right| \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\ell} = \frac{L}{\ell}\left|\frac{di}{dt}\right| = (۰/۱)(۱۳) = ۱۱/۳\ \mathrm{V/m}$$

۹۵- در شکل ۲۶-۷۵، $R_۱=۸/۰\Omega$ ، $R_۲=۱۰\Omega$ ، $L_۱=۰/۳۰\mathrm{H}$ ، $L_۲=۰/۲۰$ و باتری آرمانی دارای $\mathscr{E}=۶/۰\mathrm{V}$ است. (الف) درست پس از بستن کلید جریان با چه آهنگی در القاگر ۱ تغییر می‌کند؟ (ب) وقتی مدار در حالت پایا است، جریان در القاگر ۱ چقدر است؟



شکل ۲۶-۷۵ مسئلهٔ ۹۵

حل: (الف) درست پس از بسته شدن کلید، القاگرها مانند اتصال باز عمل می‌کنند و در نتیجه داریم $\varepsilon_L = \varepsilon_{\text{باتری}}$ و می‌توان نوشت:

$$\frac{di}{dt} = \frac{|\varepsilon_L|}{L_۱} = \frac{\varepsilon_{\text{باتری}}}{L_۱} = \frac{۶}{۰/۳} = ۲۰\ \mathrm{A/s}$$

(ب) در $t \to \infty$ القاگرها اتصال کوتاه شده و مانند یک سیم عمل می‌کنند. چون R_2 با یک سیم موازی بسته شود از مدار خارجی می‌شود و داریم

$$i = \frac{\varepsilon}{R_۱} = \frac{۶}{۸} = ۰/۷۵\ \mathrm{A}$$

۹۶- یک حلقهٔ سیمی مربعی در میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۲۴ T که عمود بر صفحه حلقه است، قرار دارد. طول هر ضلع مربع با آهنگ ثابت ۵/۰ cm/s کاهش می‌یابد. وقتی طول ۱۲ cm است، emf القا شده در حلقه چقدر است؟

حل:

$$\Phi_B = BA = Ba^۲$$

وقتی اضلاع مربع تغییر می‌کند، اندازه emf القایی نیز تغییر می‌کند.

$$\varepsilon = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = ۲Ba\frac{da}{dt} =$$

$$= (۲)(۰/۲۴)(۰/۱۲)(۵\times ۱۰^{-۲}) = ۲/۹\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{V}$$

۹۷- در زمان $t=۰$ ، یک اختلاف پتانسیل ۴۵V به طور ناگهانی به دو سر پیچه‌ای با القایدگی $L=۵۰\mathrm{mH}$ و مقاومت $R=۱۸۰\Omega$ ، برقرار می‌شود. جریان در $t=۱/۲\mathrm{ms}$ با چه آهنگی در پیچه افزایش می‌یابد.

حل:

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{۵۰\times ۱۰^{-۳}}{۱۸۰} = ۲/۷۸\times ۱۰^{-۴}\ s = ۰/۲۷۸\mathrm{ms}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)\right] = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$\frac{di}{dt} = ۱۲\mathrm{A/s}$$

۹۸- القایدگی یک پیچه که به طور فشرده پیچیده شده به گونه‌ای است که وقتی جریان با آهنگ ۵/۰۰A/s تغییر کند یک emf برابر ۳/۰۰mV القا می‌شود. جریان پایای ۸/۰۰A شار مغناطیسی ۴۰/۰μWb را در هر حلقه ایجاد می‌کند. (الف) القایدگی پیچه را حساب کنید. (ب) پیچه چند دور دارد؟

حل: (الف)

$$\varepsilon = L\left|\frac{di}{dt}\right| \Rightarrow ۳\times ۱۰^{-۳} = L(۵) \Rightarrow L = ۰/۶\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{H}$$

(ب)

$$N\Phi_B = Li \Rightarrow N(۴۰\times ۱۰^{-۶}) = (۰/۶\times ۱۰^{-۳})(۸) \Rightarrow N = ۱۲۰$$